

Feuille d'exercices n° 2

SOUS-ESPACE ORTHOGONAL ET PROJECTEUR

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = {}^t X \cdot A \cdot Y.$$

(on a identifié $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec \mathbb{R}). Déterminer une base de l'orthogonal respectif des ensembles suivants :

$$F = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E . Montrer que

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

Que peut-on dire de plus en dimension finie ?

Exercice 3. (Exemples d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

1. On munit \mathbb{R}^3 du produits scalaire usuel.
 - (a) Trouver une base orthonormée du plan $\{(2, -3, 6)\}^\perp$.
 - (b) On pose $u_1 = (1, 2, 2), u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 . Trouver une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 telle que e_1 soit colinéaire à u_1 , et que le plan engendré par e_1 et e_2 soit égal à celui engendré par u_1 , et u_2 .
2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ pour trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx.$$

Exercice 4. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E alors $E = F \oplus F^\perp$.

Indication : concernant $\dim(F^\perp)$, on pourra considérer l'application $(E \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto (\langle x, b_1 \rangle, \dots, \langle x, b_m \rangle))$, les b_i formant une base orthonormée de F .

Exercice 5 (Sur les projecteurs). Soit $p : E \rightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n .

- On dit que p est un projecteur si $p^2 = p$.
 - Soient F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$. On dit que p est la projection sur F parallèlement à G si pour tout $(f, g) \in F \times G, p(f + g) = f$.
1. On suppose que p est un projecteur. Montrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{ker}(p)$ et que p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{ker}(p)$.
 2. On suppose que p est la projection sur F parallèlement à G . Montrer que p est un projecteur.

On suppose maintenant que E est muni d'un produit scalaire. On dit que p est un projecteur orthogonal s'il existe un sous-espace F tel que p soit la projection sur F parallèlement à F^\perp .

3. Soit p un projecteur de E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et s. si : $\forall (x, y) \in \text{Im}(p) \times \text{ker}(p), \langle x, y \rangle = 0$.

Exercice 6. Soient E un espace euclidien et p un projecteur sur E . Démontrer l'équivalence suivante : p est un projecteur orthogonal \iff pour tout $x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 7. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit $p : E \rightarrow E$ un projecteur. On suppose que p satisfait : $\forall x \in E, \langle p(x), x \rangle \geq 0$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 8. Soit E un espace euclidien. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer l'équivalence entre :

1. $\text{Im}(p) \subseteq \text{Im}(q)$,
2. pour tout $x \in E, \|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Exercice 9. On se donne $v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (2, 1, 0)$ dans \mathbb{R}^3 . Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Trouver une base orthonormale \mathcal{B} pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 0)$.
3. Déterminer toutes les bases de \mathbb{R}^3 pour lesquelles la matrice de p_F est $\text{Diag}(1, 1, 0)$.

Exercice 10. Dans le plan réel, on considère un triangle ABC . On note a, b et c les longueurs des côtés respectifs BC, AC et AB et on note θ l'angle \widehat{ACB} . Montrer l'égalité suivante (dite de Al-Kashi (1380-1429), ou loi des cosinus) :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta).$$

En déduire le théorème de Pythagore ainsi que sa réciproque.

Exercice 11 (Révision de cours). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit $x \in E$. On pose $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$. Montrer que

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$

Exercice 12. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On note H l'hyperplan suivant : $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H .
2. Déterminer une base orthonormale de H .
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H , puis la distance de X à H .

Exercice 13. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et a_0, \dots, a_n des réels distincts deux à deux. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier qu'avec cette application, E est muni d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée de E .
3. Pour $Q \in E$ quelconque, déterminer la distance de Q à $H = \{P \in E \mid \sum_{i=0}^n P(a_i) = 0\}$.

Exercice 14. Dans \mathbb{R}^6 , soit $H = \{(x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de H^\perp puis la distance entre $u = (1, -1, 0, 2, 4, 0)$ et H .

Exercice 15. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note \mathcal{S} le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et \mathcal{A} celui des matrices antisymétriques. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N \rangle = \sum_{i,j} m_{ij}n_{ij}$ où m_{ij} sont les coefficients de M et n_{ij} ceux de N .

0. Vérifier que pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N \rangle = \text{tr}({}^tM \cdot N)$.
1. Soient $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Remarquer que $\langle {}^tS, {}^tA \rangle = \langle S, A \rangle$.
En déduire que $\langle S, A \rangle = 0$.
2. Déduire de la question précédente que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^\perp$ puis que $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$.
3. On sait alors (voir par exemple l'ex. 2) que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique $S \in \mathcal{S}$ et l'unique $A \in \mathcal{A}$ en fonction de M telles que $M = S + A$.
4. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre M et \mathcal{S} , la distance entre M et \mathcal{A} , puis la distance entre $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.

Exercice 16. Soit \mathcal{C} l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans \mathbb{R} . Pour f et g dans \mathcal{C} on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur \mathcal{C} .
2. Soit $f \in \mathcal{C}$. Interpréter

$$\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a - b \sin(t) - c \cos(t))^2 dt$$
 comme la distance de f à un sous-espace vectoriel de \mathcal{C} que l'on déterminera.
3. En déduire l'expression de a, b et c en fonction de f pour lesquels l'inf précédent est atteint.
4. Application : Déterminer a, b, c pour $f(t) = t$.