Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math I Algèbre - PMI

Feuille d'exercices n^{o} 2

RÉCCURENCES. ENSEMBLES. APPLICATIONS

Raisonnement directe et par récurrence

Exercice 1. Démontrer que la somme $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$ des n premiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$ en donnant une preuve directe et aussi une preuve par réccurence.

Exercice 2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 3. Montrer par réccurence que si $a \in]0,1[$, alors $1 - na < (1-a)^n < 1/(1+na)$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ établir l'inégalité : $|\sin(n\alpha)| \leq n\,|\sin \alpha|$ Indication : utiliser la formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Exercice 5. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

1. Calculer $A_{n+1} - 2A_n$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, A_n est divisible par 7.

Exercice 6. Trouver une faute dans le raisonnement :

On "montre" par récurrence que $2^n = (-1)^n$ pour tout n comme suit. On initialise avec n=0.
Hérédité : les deux suites sont solutions de $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$. Conclusion : $2^n = (-1)^n$.

Exercice 7. Soit $E_1, E_2, ..., E_n$ n ensembles distincts deux à deux. Montrer qu'au moins l'un des ensembles ne contient aucun autre.

Exercice 8. Soit A une partie de $[[1; 2n]]$ de cardinal superieur ou égal à $n+1$. On peut trouver dans A deux éléments p et q tels que p divise q.

Ensembles

Exercice 9.

1. On note $A = \{1,2,3,4\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.
2. On note $A = [1,3]$ et $B =]2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Déterminer $[3,8[\cap\mathbb{Z}$, $[-3,2[\cap\mathbb{N}$ et $]0,1[\cap\mathbb{Z}$.
4. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties $]-\infty,0]$ et $[1,2[$.
5. Déterminer $]-2,3] \setminus \mathbb{Z}$, $]-2,3] \setminus [0,4]$ et $]-2,3] \setminus [-4,4]$.

Exercice 10.

1. Écrire l'ensemble des entiers naturels pairs en extension puis en compréhension.
2. Écrire les ensembles suivants en extension.
   (a) $\{ \ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2 \ \}$;
   (b) $\{ \ n \in \mathbb{N} \mid n < 1 \ \}$;
   (c) $\{ \ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1$ et n est divisible par $2 \ \}$;
   (d) $\{ \ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N},\ n \leq m \ \}$;
   (e) $\{ \ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N},\ n < m \ \}$;
   (f) $\{ \ n \in \mathbb{N} \mid n$ divise 12 ou n divise $55 \ \}$;
   (g) $\{ \ n \in \mathbb{N} \mid n$ ne divise pas 12 et $n \leq 7 \ \}$.

Exercice 11. Décider si les ensembles suivants sont vides.

1. $\left\{ \ x \in \mathbb{R} \ \middle| \ x^2 - 3x \geq 2 \ \right\}$;
2. $\left\{ \ x \in \mathbb{R}_- \ \middle| \ \dfrac{x+1}{2x-1} > 4 \ \right\}$;
3. $\left\{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x^2 - 3xy + 4y^2 = -1 \ \right\}$;
4. $\left\{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x^2 - 3xy + 4y^2 = 4 \ \right\}$;
5. $\{ \ (x, y) \in [0, 5] \times [0, 3] \mid 2x - 5y - 10 \geq 0 \ \}$.

Exercice 12. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ et
   $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
2. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \subset B$;
   (b) $A \cap B = A$;
   (c) $A \cup B = B$;
   (d) $A \setminus B = \emptyset$.
3. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \cup B = A \cap C$;
   (b) $B \subset A \subset C$.
4. Montrer les implications

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } B \setminus A = C \setminus A) \implies B = C.$$

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C\ .$$

Exercice 13. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.

Exercice 14. Décrire les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\cos^{-1}([0,1])$;
4. $\left(\cos_{|[3,7]}\right)^{-1}([0,1])$;
5. $\left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{-1}([0,1])$;
6. $f^{-1}([0,1])$ pour $f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
7. $f^{-1}([0,1])$ pour $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0,1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
9. $\sqrt{\cdot}\,([0,1])$;
10. $f^{-1}([-1,1[\cup\{2\})$ et $f([0,1]^3)$ pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto y$;
11. $|\cdot|([-2,-1] \cup [2,4[)$;
12. $\left(|\cdot|_{|[-8,7]}\right)^{-1}([2,3])$;
13. $|\cdot|^{-1}(\{1\})$.

Surjective. Injective. Bijective...

Exercice 15. Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2+2x+1)(x-1)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x+1)(x^2-1)$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$;
4. $f : \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, |x-2| < \frac{1}{2}|x+3| \,\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ et $g :]\frac{1}{3}, 7[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$;
5. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

Exercice 16. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$;
2. $[\pi, 2\pi] \to [-1,1]$, $x \mapsto \sin(x)$;
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$;
4. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$;
5. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;
6. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;
7. $\{0,1,2,3\} \to \{1,7,9,11\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$;
8. $\{0,1,2\} \to \{-1,0,1\}$, $x \mapsto -(x-1)$;
9. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$.

Exercice 17.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \{0\}$. Montrer que f est surjective mais pas injective.
2. Soit E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^\star$, $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ et $f : \{\, x_i \mid i \in [\![1, n]\!] \,\} \to \mathbb{R}$.
   Montrer que f n'est pas surjective.

Exercice 18. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective et que g l'est aussi si f est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective et que f l'est aussi si g est injective.

Exercice 19. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Montrer que f est injective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
3. On considère maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $x \mapsto (\max(x, 0), \max(-x, 0))$.
   (a) Montrer que f est injective et donner $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
   (b) Quelle est l'image de f ?

Exercice 20. Soit E un ensemble non vide et $f : E \to \mathcal{P}(E)$.
Étudier la surjectivité de f en considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Exercice 21. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soit $B \subset F$.
   (a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
   (b) À quelle condition a-t-on $f(f^{-1}(B)) = B$?
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Soit $A \subset E$.
   (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (b) Que peut-on dire si $f_{\mid f^{-1}(f(A))}$ est injective ?
4. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 22. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$. Montrer que
$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i) .$$
2. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout ensemble I et toute famille $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$, on a
$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i) .$$
3. Soit I un ensemble et $(B_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(F)^I$. Montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) .$$