Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

Math IV - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 2

SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 1. Convergence simple, normale et uniforme

Étudier la convergence simple, la convergence normale puis la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$,
2. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$,
3. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 2. Convergence simple, uniforme et normale

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie (non vide) de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle elle converge normalement.

Exercice 3. Série de fonctions et intégrale, et dérivée

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner une expression de $f'(x)$ sous forme de série pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose (lorsque cela a un sens)

$$\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction φ.
2. Justifier l'existence de l'intégrale suivante et la calculer explicitement :

$$I = \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{e^t - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$. On admettra l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = x^n(1 - \sqrt{x})$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1 + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

Exercice 7. Classe $\mathcal{C}^\infty$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8. On pose $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

2. Sa somme est-elle continue ?

3. Étudier le comportement en $+\infty$ de sa somme S définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. On considère la série de fonctions $\sum f_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}.$$

1. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $E_s = [0, +\infty[$.
   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur $E_a =]0, +\infty[$.
   (c) Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur E_s.
   (d) La série converge-t-elle normalement sur E_s ? Et sur E_a ? Justifier.

2. Soit S la fonction somme de la série de fonctions $\sum f_n$. Montrer que lorsque t tend vers $+\infty$, $S(t)$ tend vers 1.

3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\inf(A)$ pour que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A.

Exercice 10. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha x e^{-nx^2/2} \end{array}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$? On discutera suivant les valeurs de α.

3. Montrer que pour tout $h > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[h; +\infty[$ vers la fonction nulle.

4. On se place maintenant dans le cas particulier où $\alpha = 1$ et on considère maintenant la série de fonctions de terme général f_n.

   (a) Montrer qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et que sa somme $S : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

   (b) Calculer, pour $x \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $S_m(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} f_n(x)$, puis expliciter $S(x)$ pour $x \geq 0$.

   (c) La fonction S est-elle continue en 0 ?

Exercice 11. Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.
2. Étudier la continuité de f sur D_f.
3. Montrer que la fonction f est strictement décroissante.
4. Étudier la limite de f en $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.