

Feuille d'exercices n° 1

CALCUL

Exercice 1. Ordonner les nombres qui suivent : 2 ; 1 ; $\frac{13}{15}$; $\frac{7}{8}$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$; $\frac{143}{11} - \frac{108}{9} + \frac{2}{3}$; $\frac{7}{10} \times \frac{45}{49}$.

Exercice 2. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse.

1. Pour tout couple $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$, on a : $-10 \leq x^2 - xy - 2y^2 \leq 1$.
2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a : $xy \geq -4$.
3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a : $-28 \leq xy \leq 8$.
4. Pour tout couple $(x, y) \in ([-3, -2] \cup [3, 4]) \times ([-4, -1] \cup [1, 2])$, on a : $-12 \leq xy \leq 8$.

Exercice 3.

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x = \sqrt{x^4}$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $x \leq x^2$.
3. Déterminer l'ensemble des $x \in [-1, \infty[$ qui vérifient $\sqrt{1+x} = 1-x$.
4. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\frac{1}{x-2} < \frac{1-x}{3x+2}$.

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on considère $P(x) = x^3 + x^2 + 18$.

1. Déterminer des réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $ax^2 + bx + c \geq 5$.
3. En déduire que, pour tout $x \geq -\frac{1}{3}$, on a $P(x) > 13$.

Exercice 5. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on considère $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 21x - 36$.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \geq 4$, on a $f(x) \leq x^3(3x-8)$.
 (b) En déduire que, pour tout $x \geq 4$, $f(x) \leq 3x^4$.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \geq \sqrt{21/8}$, $f(x) \leq 3x^4 - 3x^2 - 36$
 (b) En déduire que, pour tout $x \geq \sqrt{21/8}$, $f(x) \leq 3x^4$.

Exercice 6.

1. Vérifier que, pour tout réel x , $x^6 - 6x^3 + 10 \neq 0$.
2. Montrer que, pour tout réel x ,

$$\frac{-x^6 + 6x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^6 - 6x^3 + 10} \geq -1 + \frac{6}{x^6 - 6x^3 + 10}.$$

Exercice 7.

1. Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.
2. Simplifier, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
3. En déduire la limite de $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $(x - y) \times \sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i}$. En déduire $\sum_{i=0}^{n-1} x^i$.
2. Soit a et b deux nombres réels.
 - (a) On suppose a et b strictement positifs et qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $a^n = b^n$.
Que peut-on dire de a et b ?
 - (b) On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ pair tel que $a^n = b^n$. Que peut-on dire de a et b ?
 - (c) On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ impair tel que $a^n = b^n$. Que peut-on dire de a et b ?
3. Soit $L \in \mathbf{R}_+$ et $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $|a| \leq L$ et $|b| \leq L$. Montrer que $|a^3 - b^3| \leq 3L^2|a - b|$.
4. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$. Montrer que $|a^4 - b^4| \geq 4|a - b|$.

Exercice 9.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$, $(f_0, \dots, f_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $(g_0, \dots, g_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^n f_i (g_{i+1} - g_i) = - \sum_{i=1}^n (f_i - f_{i-1}) g_i + (f_n g_{n+1} - f_0 g_0) .$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. On pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$.
 - (a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}}{2} \geq 0 .$$

- (b) À quelle condition la somme précédente est-elle nulle?

Exercice 10.

1. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.
2. Résoudre en $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ l'équation $4x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$.
3. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer à quelles conditions $9x^2 - 42xy + 24y^2 \leq 0$.

Indication : écrire les expressions précédentes comme des sommes ou différences de carrés.

Exercice 11.

1. Écrire une équation du cercle \mathcal{C}_1 de centre $(4, 7)$ et de rayon 3.
2. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C}_2 = \{ (x, y) \mid x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0 \}$$

est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

3. Écrire une équation de la sphère \mathcal{S}_1 de centre $(4, 7, 1)$ et de rayon 3.
4. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{S}_2 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 1 = 0 \}$$

est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 12.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. En déduire que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $\lambda > 0$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(\lambda x^2 + \frac{1}{\lambda} y^2)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbf{R}^n)^2$, l'on a

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Exercice 13. Dans cet exercice, on acceptera comme démonstration même des esquisses d'arguments combinatoires.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et E un ensemble à n éléments.
 - (a) On rappelle qu'un *arrangement* de p éléments de E est un p -uplet d'éléments distincts de E . Calculer A_n^p , le nombre d'arrangements de p éléments de E .
 - (b) Une *permutation* de E est un arrangement de n éléments de E . Déduire A_n^n , le nombre de permutations de E , de la question précédente.
 - (c) Vérifier l'égalité $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ et en donner une interprétation combinatoire. On notera que l'on retrouve bien $A_n^0 = 1$.
 - (d) On note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments de E . Démontrer que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

puis calculer $\binom{n}{0}$ et $\binom{0}{0}$.

2. (a) Montrer que pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
(b) **Triangle de Pascal.** Montrer que, pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

(b) Donner une interprétation combinatoire de l'égalité précédente.

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et E un ensemble à n éléments. Calculer le nombre de parties de E .

5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

Exercice 14. Déterminer les extrema des ensembles qui suivent.

$$A = \{ |xy| \mid x \in [-1, 1] \text{ et } y \in [2, 3] \}; \quad B = \{ |x + 3y| \mid x \in [0, 1] \cup [5, 6] \text{ et } y \in [-3, -2] \};$$

$$C = \{ xy \mid x \in [-1, 1] \text{ et } y \in [3, 4] \}; \quad D = \{ -y(x^2 + 1) \mid x \in [-1, 0] \text{ et } y \in [-2, -1] \cup [3, 4] \};$$

$$E = \left\{ \frac{x^2 + 1}{y^2 + 3} \mid x \in [-1, 2] \text{ et } y \in [2, 3] \right\}; \quad F = \left\{ \frac{x^3 + 1}{y^4 + 1} \mid x \in [-2, 2] \text{ et } y \in [-1, 3] \right\}.$$

Exercice 15. Donner les parties entières des nombres qui suivent : 2 ; $3,7$; $-0,5$; $\frac{27}{13}$; $-\frac{17}{3}$; $\sqrt{13}$.

Exercice 16. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $x = 2\pi k + \theta$.

Exercice 17. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. On définit $E = \{ n \in \mathbf{N} \mid 2^n \leq x \}$.

Montrer que E possède un maximum et que $\max E = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$.

Exercice 18.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| \leq \varepsilon .$$

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :

$$|(1 + e^{-n}) - 1| \leq \varepsilon .$$

3. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :

$$\left| (1 + e^{-n}) \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| \leq \varepsilon .$$

4. Pour tout $R \in \mathbf{R}$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :

$$\frac{n}{2} \geq R .$$

Exercice 19.

1. Montrer que, pour tout $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 .$$

3. Montrer que, pour tout $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*$, on a :

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor .$$

Exercice 20. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a

$$\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \leq x < \frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} + \frac{1}{a^k} .$$

2. En déduire que $\left(\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \right)_{k \in \mathbf{N}}$ converge.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a

$$\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \leq \frac{\lfloor a^{k+1} x \rfloor}{a^{k+1}} .$$

Exercice 21. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites réelles convergentes.

Montrer que la suite $(\max(u_n, v_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

Exercice 22. Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $(u_n) = \left(\frac{n}{n^2 + 1} \right)$
2. $(u_n) = \left(\left(n + \frac{1}{n} \right) \left(n - \frac{1}{n} \right) - n^2 \right)$
3. $(u_n) = \left(\left(n + \frac{2}{n^2} \right)^3 - n^3 \right)$
4. $(u_n) = \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} \right)$
5. $(u_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n + 1} \right)$
6. $(u_n) = \left(\frac{2n^6 + 5n + 1}{n^6 - 1} \right)_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}}$.

Exercice 23. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} .$$