

**Feuille d'exercices n° 1**

CALCUL

**Exercice 1.** Ordonner les nombres qui suivent :  $2$  ;  $1$  ;  $\frac{13}{15}$  ;  $\frac{7}{8}$  ;  $\sqrt{3}$  ;  $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$  ;  $\frac{143}{11} - \frac{108}{9} + \frac{2}{3}$  ;  $\frac{7}{10} \times \frac{45}{49}$ .

**Exercice 2.** Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse.

1. Pour tout couple  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$ , on a :  $-10 \leq x^2 - xy - 2y^2 \leq 1$ .
2. Pour tout couple  $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$ , on a :  $xy \geq -4$ .
3. Pour tout couple  $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$ , on a :  $-28 \leq xy \leq 8$ .
4. Pour tout couple  $(x, y) \in ([-3, -2] \cup [3, 4]) \times ([-4, -1] \cup [1, 2])$ , on a :  $-12 \leq xy \leq 8$ .

**Exercice 3.**

1. Déterminer l'ensemble des  $x \in \mathbf{R}$  qui vérifient  $x = \sqrt{x^4}$ .
2. Déterminer l'ensemble des  $x \in \mathbf{R}$  qui vérifient  $x \leq x^2$ .
3. Déterminer l'ensemble des  $x \in [-1, \infty[$  qui vérifient  $\sqrt{1+x} = 1-x$ .
4. Déterminer l'ensemble des  $x \in \mathbf{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$  qui vérifient  $\frac{1}{x-2} < \frac{1-x}{3x+2}$ .

**Exercice 4.** Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on considère  $P(x) = x^3 + x^2 + 18$ .

1. Déterminer des réels  $a, b, c$  tels que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $P(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$ .
2. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on a  $ax^2 + bx + c \geq 5$ .
3. En déduire que, pour tout  $x \geq -\frac{1}{3}$ , on a  $P(x) > 13$ .

**Exercice 5.** Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on considère  $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 21x - 36$ .

1. (a) Montrer que, pour tout  $x \geq 4$ , on a  $f(x) \leq x^3(3x-8)$ .  
 (b) En déduire que, pour tout  $x \geq 4$ ,  $f(x) \leq 3x^4$ .
2. (a) Montrer que, pour tout  $x \geq \sqrt{21/8}$ ,  $f(x) \leq 3x^4 - 3x^2 - 36$   
 (b) En déduire que, pour tout  $x \geq \sqrt{21/8}$ ,  $f(x) \leq 3x^4$ .

**Exercice 6.**

1. Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $x^6 - 6x^3 + 10 \neq 0$ .
2. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,

$$\frac{-x^6 + 6x^3 + 3x^2 + 6x - 1}{x^6 - 6x^3 + 10} \geq -1 + \frac{6}{x^6 - 6x^3 + 10}.$$

### Exercice 7.

1. Démontrer qu'il existe  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tel que, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ .
2. Simplifier, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .
3. En déduire la limite de  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 8.

1. Soit  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  et  $n \in \mathbf{N}^*$ . Calculer  $(x - y) \times \sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i}$ . En déduire  $\sum_{i=0}^{n-1} x^i$ .
2. Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels.
  - (a) On suppose  $a$  et  $b$  strictement positifs et qu'il existe  $n \in \mathbf{N}^*$  tel que  $a^n = b^n$ .  
Que peut-on dire de  $a$  et  $b$ ?
  - (b) On suppose qu'il existe  $n \in \mathbf{N}^*$  pair tel que  $a^n = b^n$ . Que peut-on dire de  $a$  et  $b$ ?
  - (c) On suppose qu'il existe  $n \in \mathbf{N}^*$  impair tel que  $a^n = b^n$ . Que peut-on dire de  $a$  et  $b$ ?
3. Soit  $L \in \mathbf{R}_+$  et  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $|a| \leq L$  et  $|b| \leq L$ . Montrer que  $|a^3 - b^3| \leq 3L^2|a - b|$ .
4. Soit  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tels que  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$ . Montrer que  $|a^4 - b^4| \geq 4|a - b|$ .

### Exercice 9.

1. Soit  $n \in \mathbf{N}$ ,  $(f_0, \dots, f_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$  et  $(g_0, \dots, g_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+2}$ . Montrer que

$$\sum_{i=0}^n f_i (g_{i+1} - g_i) = - \sum_{i=1}^n (f_i - f_{i-1}) g_i + (f_n g_{n+1} - f_0 g_0) .$$

2. Soit  $n \in \mathbf{N}$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . On pose  $x_0 = 0$  et  $x_{n+1} = 0$ .
  - (a) Montrer que

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}}{2} \geq 0 .$$

- (b) À quelle condition la somme précédente est-elle nulle?

### Exercice 10.

1. Démontrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $x^2 - xy + y^2 \geq 0$ .
2. Résoudre en  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  l'équation  $4x^2 + 12xy + 8y^2 = 0$ .
3. Soit  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Déterminer à quelles conditions  $9x^2 - 42xy + 24y^2 \leq 0$ .

Indication : écrire les expressions précédentes comme des sommes ou différences de carrés.

### Exercice 11.

1. Écrire une équation du cercle  $\mathcal{C}_1$  de centre  $(4, 7)$  et de rayon 3.
2. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C}_2 = \{ (x, y) \mid x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0 \}$$

est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

3. Écrire une équation de la sphère  $\mathcal{S}_1$  de centre  $(4, 7, 1)$  et de rayon 3.
4. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{S}_2 = \{ (x, y, z) \mid x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 1 = 0 \}$$

est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

### Exercice 12.

1. Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .
2. En déduire que, pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  et tout  $\lambda > 0$ ,  $|xy| \leq \frac{1}{2}(\lambda x^2 + \frac{1}{\lambda} y^2)$ .
3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et tout  $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in (\mathbf{R}^n)^2$ , l'on a

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

**Exercice 13.** Dans cet exercice, on acceptera comme démonstration même des esquisses d'arguments combinatoires.

1. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $E$  un ensemble à  $n$  éléments.
  - (a) On rappelle qu'un *arrangement* de  $p$  éléments de  $E$  est un  $p$ -uplet d'éléments distincts de  $E$ . Calculer  $A_n^p$ , le nombre d'arrangements de  $p$  éléments de  $E$ .
  - (b) Une *permutation* de  $E$  est un arrangement de  $n$  éléments de  $E$ . Déduire  $A_n^n$ , le nombre de permutations de  $E$ , de la question précédente.
  - (c) Vérifier l'égalité  $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$  et en donner une interprétation combinatoire. On notera que l'on retrouve bien  $A_n^0 = 1$ .
  - (d) On note  $C_n^p$  ou  $\binom{n}{p}$  le nombre de parties à  $p$  éléments de  $E$ . Démontrer que

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

puis calculer  $\binom{n}{0}$  et  $\binom{0}{0}$ .

2. (a) Montrer que pour tous entiers  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n$ ,  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ .  
(b) **Triangle de Pascal.** Montrer que, pour tous entiers  $n$  et  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n-1$ ,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

3. (a) Montrer que, pour tout  $(a, b) \in \mathbf{C}^2$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

(b) Donner une interprétation combinatoire de l'égalité précédente.

4. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Calculer le nombre de parties de  $E$ .

5. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Simplifier  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ .

**Exercice 14.** Déterminer les extrema des ensembles qui suivent.

$$A = \{ |xy| \mid x \in [-1, 1] \text{ et } y \in [2, 3] \}; \quad B = \{ |x + 3y| \mid x \in [0, 1] \cup [5, 6] \text{ et } y \in [-3, -2] \};$$

$$C = \{ xy \mid x \in [-1, 1] \text{ et } y \in [3, 4] \}; \quad D = \{ -y(x^2 + 1) \mid x \in [-1, 0] \text{ et } y \in [-2, -1] \cup [3, 4] \};$$

$$E = \left\{ \frac{x^2 + 1}{y^2 + 3} \mid x \in [-1, 2] \text{ et } y \in [2, 3] \right\}; \quad F = \left\{ \frac{x^3 + 1}{y^4 + 1} \mid x \in [-2, 2] \text{ et } y \in [-1, 3] \right\}.$$

**Exercice 15.** Donner les parties entières des nombres qui suivent :  $2$ ;  $3,7$ ;  $-0,5$ ;  $\frac{27}{13}$ ;  $-\frac{17}{3}$ ;  $\sqrt{13}$ .

**Exercice 16.** Soit  $x \in \mathbf{R}$ . Montrer qu'il existe  $k \in \mathbf{Z}$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$  tels que  $x = 2\pi k + \theta$ .

**Exercice 17.** Soit  $x \in \mathbf{R}^*$ . On définit  $E = \{ n \in \mathbf{N} \mid 2^n \leq x \}$ .

Montrer que  $E$  possède un maximum et que  $\max E = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \right\rfloor$ .

**Exercice 18.**

1. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , donner explicitement  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $n \geq n_0$ , on ait :

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| \leq \varepsilon .$$

2. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , donner explicitement  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $n \geq n_0$ , on ait :

$$|(1 + e^{-n}) - 1| \leq \varepsilon .$$

3. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , donner explicitement  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $n \geq n_0$ , on ait :

$$\left| (1 + e^{-n}) \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| \leq \varepsilon .$$

4. Pour tout  $R \in \mathbf{R}$ , donner explicitement  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $n \geq n_0$ , on ait :

$$\frac{n}{2} \geq R .$$

**Exercice 19.**

1. Montrer que, pour tout  $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$ ,  $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$ .
2. Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , on a :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 .$$

3. Montrer que, pour tout  $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*$ , on a :

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor .$$

**Exercice 20.** Soit  $x \in \mathbf{R}$  et  $a \in \mathbf{N}^*$ .

1. Montrer que pour tout  $k \in \mathbf{N}$  l'on a

$$\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \leq x < \frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} + \frac{1}{a^k} .$$

2. En déduire que  $\left( \frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \right)_{k \in \mathbf{N}}$  converge.
3. Montrer que pour tout  $k \in \mathbf{N}$  l'on a

$$\frac{\lfloor a^k x \rfloor}{a^k} \leq \frac{\lfloor a^{k+1} x \rfloor}{a^{k+1}} .$$

**Exercice 21.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  deux suites réelles convergentes.

Montrer que la suite  $(\max(u_n, v_n))_{n \in \mathbf{N}}$  converge.

**Exercice 22.** Étudier la convergence des suites suivantes :

1.  $(u_n) = \left( \frac{n}{n^2 + 1} \right)$
2.  $(u_n) = \left( \left( n + \frac{1}{n} \right) \left( n - \frac{1}{n} \right) - n^2 \right)$
3.  $(u_n) = \left( \left( n + \frac{2}{n^2} \right)^3 - n^3 \right)$
4.  $(u_n) = \left( \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} \right)$
5.  $(u_n) = \left( \frac{(-1)^n}{n + 1} \right)$
6.  $(u_n) = \left( \frac{2n^6 + 5n + 1}{n^6 - 1} \right)_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}}$ .

**Exercice 23.** Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} .$$