Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2024-2025

Maths III PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 1 : révisions d'algèbre linéaire

I. Espaces vectoriels – Bases

Exercice 1.

1. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.
2. Soient $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \longmapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1, 1)$, $x = (0, 0, 1, 0)$ et $y = (1, 1, 0, -1)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$ et $G = \mathrm{Vect}(x, y)$. Quelles sont les dimensions de $F, G, F + G$ et $F \cap G$?

Exercice 3. Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $F = \{P \in \mathbb{C}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynôme de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
   (b) Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.

II. Applications linéaires – Théorème du rang

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application u :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z). \end{array}$$

1. Montrer que u est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 5. Pour chacune des applications qui suit, dire (en le justifiant) si elle est linéaire ou non :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2PP' \end{array}$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.
2. $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par "$f(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par $X^4 - 5X + 2$".

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$ et que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$ si et seulement si $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
   (c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$.
3. (a) Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant les propriétés du 2.
   (b) Les équivalences sont-elles encore vraies en dimension infinie ?

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe un entier naturel p tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On dira que u est *ponctuellement nilpotent* si, pour tout $x \in E$, il existe un entier naturel p (qui dépend de x) tel que $u^p(x) = 0_E$.

1. Démontrer que tout endomorphisme nilpotent est ponctuellement nilpotent.
2. Démontrer que la réciproque est vraie si E est de dimension finie.
3. Donner un exemple d'endomorphisme ponctuellement nilpotent non nilpotent.

4. On suppose E de dimension finie n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Démontrer que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   Indication : soit p le plus petit entier strictement positif tel que $u^p = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x))$ soit libre.

III. Matrices – Changements de base

Exercice 8. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$u(P) = (1 - X^2)P'' - XP',$$

pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer des bases respectives de l'image et du noyau de u.

Exercice 9. On considère les fonctions d'une variable réelle f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = e^{-x}\cos x,\ f_2(x) = e^{-x}\sin x,\ f_3(x) = xe^{-x}\cos x,\ f_4(x) = xe^{-x}\sin x.$$

On considère $F = \left\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ f = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4\right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.
2. On considère l'application $\phi : F \longrightarrow F$ définie par $\phi(f) = f'$.
   (a) Vérifier que ϕ définit un endomorphisme de F.
   (b) Écrire la matrice A de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
3. (a) Montrer que ϕ est bijective et déterminer la matrice de ϕ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire une primitive de la fonction continue f_3.
4. (a) On peut vérifier que l'on a $A^4 = -4I_4 + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer B^2 et en déduire l'expression de A^{4n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'expression de la dérivée d'ordre $4n$ de f_3.

Exercice 10. On note $S(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A = {}^tA\}$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n et $A(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A = -{}^tA\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $S(n)$ et $A(n)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Calculer la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
3. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\phi(A) = A + {}^tA$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer la trace de ϕ.

Exercice 11.

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont la même trace.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que toutes les matrices de u ont la même trace.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables. Montrer que pour tout entier naturel k, les matrices A^k et B^k ont la même trace.

Exercice 12. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 - e_2$, $\varepsilon_3 = e_1 + e_3$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de E.
2. Écrire la matrice M de u dans cette base. Quelle relation lie A et M ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'application :

$$u_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & AM - MA. \end{array}$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. (a) En calculant $u(I_n)$, déterminer s'il existe des matrices A telles que l'application u soit injective.
   (b) Existe-il des matrices A telles que l'application u soit surjective ?

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{C}$. Donner la matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 14. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

IV. Inversibilité

Exercice 16. Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et expliciter son inverse.
3. Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
4. En déduire A^n pour tout $n \geq 2$.