Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Math IV - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 1

Révisions sur les séries numériques

Exercice 1. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

a). $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ b). $u_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$ c). $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ d). $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 2. Déterminer la nature de la série de terme général défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } n \text{ est un carré} \\ \\ \dfrac{1}{n^2} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercice 3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes :

$$\sum \max(u_n, v_n), \quad \sum \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries u_n et v_n sont de même nature.

Exercice 5. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{e - (1+\frac{1}{n})^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor + n}$$

Exercice 6. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ une série à termes positifs convergente. Peut-on préciser la nature de la série de terme général $u_n = a_0 a_1 \cdots a_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) ?

Exercice 7. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

a). $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$, b). $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, c). $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$, d). $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$.

Exercice 8. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
2. Donner un encadrement du reste d'ordre n de cette série.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ est un réel négatif.

Exercice 9. Étudier la nature de la série suivante et calculer sa somme si elle est convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 10. Déterminer un équivalent simple de :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha < 1$ donné,
2. $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ donné.

Exercice 11. Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature des séries de termes généraux :

a). $u_n = e^{-n^\alpha}$, b). $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$, c). $u_n = \exp(-(\ln n)^\alpha)$ d). $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

Exercice 12. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$.

1. Donner un équivalent simple de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $S_n = \ln n + C + o(1)$ quand $n \to +\infty$ où C est une constante réelle.

   Indication : on rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ *quand* $n \to +\infty$, *où* γ *est la constante d'Euler.*

Exercice 13. Prouver l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$.

Indication : on pourra essayer de faire apparaître un produit de Cauchy.