

Feuille d'exercices n° 1
INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

I. Rappels : comparaison locale de fonctions

Exercice 1.

1. Est-ce que $] - 1; 0[\cup] 0; 1[$ est un voisinage de 0 ? un voisinage pointé ?
2. Soient f, g et h des fonctions réelles de la variable réelle définies sur un voisinage pointé de x_0 (avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou x_0 infini). Démontrer les assertions suivantes :
 - (a) si $g =_{x_0} o(h)$ alors $fg =_{x_0} o(fh)$,
 - (b) si $f \sim_{x_0} g$ et $h =_{x_0} o(f)$, alors $h =_{x_0} o(g)$,
 - (c) si $f =_{x_0} o(g)$ et $g =_{x_0} \mathcal{O}(h)$, alors $f =_{x_0} o(h)$.

Exercice 2. Soit $f(x) = x^4 + \cos(x) + \frac{1}{x}$. Pour les fonctions g suivantes, expliquer si l'on a ou non $f \sim_{+\infty} g$:

1. $g(x) = x^4$, 2. $g(x) = 2x^4$, 3. $g(x) = x^4 + 1$, 4. $g(x) = x^4 + \frac{1}{x}$.

Exercice 3. Vrai ou faux ?

1. $x \sim_0 0$, 2. $x^3 =_{+\infty} o(x^3 + x^2)$, 3. $\sin(x) =_0 x + o(x)$, 4. $1 =_0 \cos(x) + o(x^2)$
 5. $o(f) + o(f) =_{x_0} o(f)$, 6. $o(x^2) + o(x) =_0 o(x)$, 7. $\ln(1+x) - x =_0 o(1)$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)} \right)$.

II. Intégrales généralisées

Exercice 5. Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes et calculer éventuellement leur valeur :

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$,
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$, discuter du résultat en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. $\int_0^1 \ln(x) dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$.

Exercice 6. Démontrer l'énoncé suivant :

Théorème : Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, et soit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Supposons que $|g| \leq f$. Alors, si l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ existe, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ existe également.

Exercice 7. Les fonctions suivantes sont-elles absolument intégrables sur les intervalles donnés :

1. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^{1/2}}$ sur $]0; 1]$,
2. $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$,
3. $x \mapsto x^{a-1}e^{-x}$ sur $]0; +\infty[$, pour $a > 0$ fixé. On note lorsque cela a un sens $\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x} dx$.
Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Démontrer l'énoncé suivant :

Théorème : Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante. On a alors l'équivalence suivante :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f(n) \text{ existe} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Exercice 9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{t - \sin t}{t^a} dt$ existe.

Exercice 10. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x \ln(2+x^2)} dx$,
2. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$,
3. $\int_0^1 \frac{\cosh x - \cos x}{x^{5/2}} dx$,
4. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} dx$.

Exercice 11. Montrer que les intégrales impropres suivantes existent :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy$,
2. $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ (Intégrale de Fresnel)

Exercice 12. Démontrer l'énoncé suivant (Critère de Cauchy) :

Théorème : Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ existe si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 1$ tel que pour tout $a, b > R$ on a

$$\left| \int_1^a f(x) dx - \int_1^b f(x) dx \right| = \left| \int_b^a f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Exercice 13. Démontrons de deux manières différentes que $x \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

1. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \sin^2 t$.

(b) Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.

(c) En déduire que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

2. En utilisant les séries numériques :

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{(k+1)\pi}$.

(c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

En déduire la limite de $\sum_{k=2}^N \frac{1}{k}$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

(d) Conclure sur la non intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ sur $[1; +\infty[$.