Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2014-2015

Maths III PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 1

Intégrales généralisées

I. Rappels : comparaison locale de fonctions

Exercice 1.

1. Est-ce que $]-1;0[\cup]0;1[$ est un voisinage de 0 ? un voisinage pointé ?
2. Soient f, g et h des fonctions réelles de la variable réelle définies sur un voisinage pointé de x_0 (avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou x_0 infini). Démontrer les assertions suivantes :
   (a) si $g =_{x_0} o(h)$ alors $fg =_{x_0} o(fh)$,
   (b) si $f \sim_{x_0} g$ et $h =_{x_0} o(f)$, alors $h =_{x_0} o(g)$,
   (c) si $f =_{x_0} o(g)$ et $g =_{x_0} \mathcal{O}(h)$, alors $f =_{x_0} o(h)$.

Exercice 2. Soit $f(x) = x^4 + \cos(x) + \frac{1}{x}$. Pour les fonctions g suivantes, expliquer si l'on a ou non $f \sim_{+\infty} g$:

1. $g(x) = x^4$, 2. $g(x) = 2x^4$, 3. $g(x) = x^4 + 1$, 4. $g(x) = x^4 + \frac{1}{x}$.

Exercice 3. Vrai ou faux ?

1. $x \sim_0 0$, 2. $x^3 =_{+\infty} o(x^3 + x^2)$, 3. $\sin(x) =_0 x + o(x)$, 4. $1 =_0 \cos(x) + o(x^2)$
5. $o(f) + o(f) =_{x_0} o(f)$, 6. $o(x^2) + o(x) =_0 o(x)$, 7. $\ln(1 + x) - x =_0 o(1)$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}\right)$.

II. Intégrales généralisées

Exercice 5. Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les domaines considérés et déterminer la valeur de leur intégrale dans les cas intégrables :

1. $x \longmapsto e^{-x}$ sur $[0; +\infty[$ et $x \longmapsto e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$,
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ sur $[1; +\infty[$ et sur $]0; 1]$, discuter du résultat en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. $x \longmapsto \ln(x)$ sur $]0; 1]$ et $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur $[1; +\infty[$.

Exercice 6. Les fonctions suivantes sont-elles absolument intégrables sur les intervalles donnés :

1. $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t^{1/2}}$ sur $]0; 1]$,
2. $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$,
3. $x \longmapsto x^{a-1}e^{-x}$ sur $]0; +\infty[$, pour $a > 0$ fixé. On note lorsque cela a un sens $\Gamma(a) := \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$. Calculer $\Gamma(n + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Démontrer l'énoncé suivant :

Théorème : Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante. On a alors l'équivalence suivante :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n) \quad \text{existe} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{converge.}$$

(Pour une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, à valeurs positives, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si elle est finie, et diverge sinon.)

Exercice 8. Intégrales de Bertrand.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On veut étudier la nature de l'intégrale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t.$$

(Les intégrales de Riemann sont supposées connues, mais pas les intégrales de Bertrand.)

1. On suppose $\alpha > 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{t^\gamma}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \longrightarrow 0$ quand t tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire la convergence de l'intégrale étudiée.
2. On suppose $\alpha = 1$.
   (a) Soit $x > e$. Calculer $\displaystyle\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Déterminer pour quels $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale étudiée converge.
3. On suppose enfin $\alpha < 1$.
   (a) Déterminer la limite de $\dfrac{t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire la nature de l'intégrale étudiée.

Exercice 9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t - \sin t}{t^a}\,\mathrm{d}t$ définisse un réel.

Exercice 10. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x \ln(2 + x^2)}\,\mathrm{d}x,$
2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$
3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{\ln(t)}}\,\mathrm{d}t,$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh x - \cos x}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}x,$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\sin\left(1/x^2\right)}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 11. Montrer que les intégrales impropres suivantes existent :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y$,
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ (Intégrale de Fresnel)

Exercice 12. Démontrer l'énoncé suivant (Critère de Cauchy) :

Théorème : Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 1$ tel que pour tout $a, b > R$ on a

$$\Big|\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^b f(x)\,dx\Big| = \Big|\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\Big| < \varepsilon.$$

Exercice 13. Démontrer l'énoncé suivant :

Théorème : Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et intégrable sur $[1;+\infty[$ et soit $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Supposons que $|g| \leq f$. Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ existe.

Exercice 14. Démontrons de deux manières différentes que $x \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.

1. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \sin^2 t$.
   (b) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (c) En déduire que $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$.
2. En utilisant les séries numériques :
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t$.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{(k+1)\pi}$.
   (c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.
   En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k}$ lorsque $N \to +\infty$.
   (d) Conclure sur la non intégrabilité de $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur $[1;+\infty[$.