Feuille d'exercices n° 1

Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(E) : \quad y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

d'inconnue $y :]-\pi/2; \pi/2[\to \mathbb{R}$, deux fois dérivable.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$$

d'inconnue $y :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. En cherchant des solutions particulières de l'équation différentielle sans second membre associée à (E) sous la forme $x \longmapsto x^\alpha e^x$, où $\alpha \in \mathbb{Z}$ est une constante à choisir, puis en appliquant la méthode de variation des constantes, résoudre (E) sur $]0; +\infty[$.

Exercice 3. (Problème de raccord) On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E) : \quad xy'' + (x-2)y' - 2y = 0$$

d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les fonctions sommes de séries entières solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. On les exprimera à l'aide de fonctions usuelles.
2. On note $I_1 =]-\infty; 0[$ et $I_2 =]0; +\infty[$. Résoudre (E) sur I_1 et I_2.
3. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Méthode de Lagrange (aussi appelée méthode d'abaissement de l'ordre ou méthode de variation de **la** constante)

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(E) : \quad x^2(x+1)y'' - x(x^2+4x+2)y' + (x^2+4x+2)y = 0$$

d'inconnue $y :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, sachant qu'il existe une solution polynomiale autre que la fonction nulle.

Exercice 5. Résoudre l'équation différentielle suivante

$$(E) : \quad x(x^2-1)y'' - 2(x^2-1)y' + 2xy = 0$$

d'inconnue $y :]1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, sachant qu'il existe une solution polynomiale autre que la fonction nulle.

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère deux solutions u et v de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

1. Montrer que le Wronskien de u et v (noté W) vérifie une équation différentielle et le calculer en fonction de sa valeur en un point a de I.
2. On suppose que u ne s'annule pas sur I. Exprimer W à l'aide d'une dérivée. Expliquer comment obtenir v à l'aide de W et u.
3. Application : On considère l'équation différentielle $x^2y'' - x(2+x)y' + (x+2)y = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.
   (a) Déterminer une solution polynomiale de (E).
   (b) À l'aide du Wronskien, déterminer une deuxième solution de (E) sur $I_1 =]-\infty; 0[$ et sur $I_2 =]0; +\infty[$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).