Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2011-2012

Math III - PMI

Feuille d'exercices n° 10

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES - ETUDE LOCALE

---

1 Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 1. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|a| + |b| \leq r$ il existe une unique solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ au système suivant.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5x^2y^3 = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) = b \end{cases}$$

Exercice 2. On considère l'équation $2xy - 2x + y - 2 = 0$.

a) Montrer que l'équation définit implicitement deux fonctions $y(x)$ et $x(y)$.

b) Représenter ces deux fonctions dans un même repère.

c) Montrer qu'elles sont bijectives et déterminer leurs fonctions reciproques.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Montrer qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tels que $\phi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Démontrer que pour x suffisamment proche de 0, il existe un unique $y = y(x) > 0$ tel que $f(x, y) = 0$. Vérifier sans resolution explicite que $y'(x) = \frac{x}{y}$

Exercice 5. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On munit E d'une norme quelconque. Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U et V de Id_E tels que pour tout $X \in U$, il existe un unique $Y \in V$ tel que : $Y^3 = X$. (Indication : On pensera à développer $(\mathrm{Id}_E + A)^3$.)

Exercice 6. On considère la fonction $f :]-\infty, 1[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - y^3 - 1$.

a) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites, que pour tout $(x_0, y_0) \in]-\infty, 1[\times\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0, y_0) = 0$ il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant $\phi(x_0) = y_0$ et $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in U$.

b) Montrer qu'en fait $f(x, y) = 0$ définit implicitement une unique fonction ϕ: $]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$. Vérifier que ϕ est de classe C^3 dans $]-\infty, 1[$ et qu'elle vérifie : $\phi^2\phi''' + 6\phi\phi'\phi'' + 2(\phi')^3 + 2 = 0$.

Exercice 7. Soit $(u, v) \mapsto f(u, v)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On pose $g(x, y) = f(\arctan \frac{y}{x}, \arctan \frac{x}{y})$. La relation $g(x, y) = 0$ définit-elle une fonction implicite $y = j(x)$? Si oui, calculer sa dérivée $j'(x)$, et expliciter la fonction j.

Exercice 8. (Point fixe avec un paramètre)
Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On suppose qu'il existe un nombre réel $\lambda \in [0; 1[$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|F(t,x) - F(t,y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

1. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $x \in \mathbb{R}^n$ à l'équation $F(t,x) = x$. On notera x_t cette solution.
2. Montrer que l'application $(g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto x_t)$ est de classe C^1. (On pourra appliquer le théorème des fonctions implicites à $(t,x) \mapsto F(t,x) - x$.)
3. **Application.** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le système suivant

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1 \\ y = \frac{1}{3}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

   admet une unique solution $(x_t, y_t) \in \mathbb{R}^2$ et que l'application $t \mapsto (x_t, y_t)$ est de classe C^1. (Indication : on pourra utiliser la norme 1 ainsi que le théorème des accroissements finis et obtenir une inégalité concernant $|\sin(x+y) - \sin(x'+y')|$ et $|\cos(x-y) - \cos(x'-y')|$.)

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle de degré au plus d. On le munit de la norme infinie. Soit $P_0 = c_0 + c_1X + \cdots + c_dX^d$ un polynôme de E ayant une racine $x_0 \in \mathbb{R}$. On la supposera simple.
On définit $F : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme suit : étant donné $P \in E$ s'écrivant $P = a_0 + a_1X + \cdots + x_dX^d$ et pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $F(P,t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_dt^d$.
Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $|a_i - c_i| < r$, le polynôme $P = a_0 + \cdots + a_dX^d$ admet une unique racine simple x_P dans $]x_0 - r; x_0 + r[$ et la fonction $P \mapsto x_P$ est de classe C^1.
Remarque : avec moins de rigueur, on dira que les racines simples dépendent continûment (et même de façon C^1) des coefficients du polynôme.

Exercice 10. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et soit $f : U \longrightarrow U$ l'application définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
a) Rappeler pourquoi U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa matrice Jacobienne. Quelle est la matrice de $df_{(a,b)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?
c) Montrer que f est un difféomorphisme local.
d) Montrer que f n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$.
Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image $f(\mathbb{R}^3)$, et que $f(\mathbb{R}^3)$ est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$. Montrer que f est continue et différentiable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la différentielle en 0 est un isomorphisme. Montrer cependant que la restriction de f à n'importe quel voisinage de 0 n'est pas injective. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 13. Soit a, b deux réels et soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + a\sin(y), y + b\sin(x))$.

a) Calculer la matrice Jacobienne de f.

b) Pour quelles valeurs de a et b l'application f est-elle un difféomorphime local ?

Dans la suite on suppose que a, b vérifient cette condition.

c) Montrer que $\forall t, t' \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(t) - \sin(t')| \leq |t - t'|$.

d) En déduire que f est un difféomorphisme global sur son image.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y)$

a) Justifier que f est de classe C^1, calculer sa différentielle $df_{(x,y)}$ et montrer que la différentielle est inversible $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$. Justifier que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert.

c) Montrer que f^{-1} est lipschitzienne. (On prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$ la norme $\|(x, y)\| = |x| + |y|$).

d) En deduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

e) Calculer $d_p f^{-1}$ ou $p = (1 - \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi)$.

Exercice 15. Établir si les applications $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x + x^3$ sont des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16. On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto x^3 - 2xy + 2y^2 - 1$. Trouver la pente de la droite tangente à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ au point $(1, 1)$. Préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

Exercice 17. On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3$.

Déterminer l'équation du plan tangent à cette surface au point $(1, 1, 1)$.

Vérifier qu'au voisinage du point $(1, 1, 1)$ la surface $f(x, y, z) = 0$ est le graphe d'une fonction $z = g(x, y)$. Écrire le développement limité de g au voisinage de $(1, 1)$ d'ordre 2. Quelle est la matrice hessienne de g dans les bases canoniques ? Quelle est la position de la courbe par rapport au plan tangent ?

2 Extrema locaux

Exercice 18. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. Déterminer les extrema locaux de la fonction f.
2. La fonction f possède-t-elle d'extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer les extréma globaux de la restriction de f à l'ensemble

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -2 \leq x \leq 0,\ y = x + 1\}$$

   en précisant en quels points ils sont atteints.

Exercice 19. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2+2y^2+x^2+y^2-x^4-y^4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. À l'aide des coordonnées polaires, vérifier que $f(x,y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$, où $r^2 = x^2+y^2$. En déduire que $f(x,y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y at-il un minimum global ?

Exercice 20. On définit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 2$.

1. Vérifier que si D est une droite passant par $(0,0)$, la restriction de f à D possède un maximum local à l'origine.
2. Établir si $(0,0)$ est un point de maximum local.

Exercice 21. Déterminer les bornes de la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$

sur le compact $K = [-1,1] \times [-1,1]$.

Exercice 22. Déterminer sur le compact $K = [0,1] \times [0,1]$ la borne supérieure de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y^2), & x \leq y \\ y(1-x^2), & x > y. \end{cases}.$$

Exercice 23. Soient f et g les fonctions : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz$ et $g(x,y,z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz$. Démontrer que l'origine est un point critique pour f et g et en préciser la nature. Donner la nature du point critique de g, $P = (-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})$.