

**Feuille d'exercices n° 1**

RÉVISIONS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES ET LES SUITES DE FONCTIONS

**I. Séries numériques**

**Exercice 1.** Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

a).  $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$       b).  $u_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$       c).  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$       d).  $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

**Exercice 2.** Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes :

$$\sum \max(u_n, v_n), \quad \sum \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

**Exercice 3.** Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

a).  $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ ,      b).  $u_n = \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$ .

**Exercice 4.** On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ .

1. Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$ .
2. Donner un encadrement du reste d'ordre  $n$  de cette série.
3. En déduire que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$  est un réel négatif.

**Exercice 5.** Étudier la nature de la série suivante et calculer sa somme si elle est convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

**Exercice 6.** Déterminer un équivalent simple de :

1.  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  pour  $\alpha < 1$  donné,
2.  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  pour  $\alpha > 1$  donné.

**Exercice 7.** Déterminer en fonction du paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$  la nature des séries de termes généraux :

a).  $u_n = e^{-n^\alpha}$ ,      b).  $u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$ ,      c).  $u_n = \exp(-(\ln n)^\alpha)$       d).  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ .

**Exercice 8.** Prouver l'existence et calculer la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$ .

*Indication : on pourra essayer de faire apparaître un produit de Cauchy.*

## II. Suites de fonctions

**Exercice 9.** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Démontrer que pour tout  $a > 0$ , la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur les intervalles  $] -\infty; -a]$  et  $[a; +\infty[$ .
3. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément sur  $]0; +\infty[$ ?

**Exercice 10.** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$  pour  $x \in [0; 1]$ .

1. Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0; 1]$ .
2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ .

**Exercice 11.** Soit  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définies sur  $[0; 1]$  par  $f_n(x) = \frac{f(x)}{1+n^2 x^2}$ .

1. Lorsque  $f(x) = x$  pour tout  $x \in [0; 1]$ , la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle uniformément sur  $[0; 1]$ ?
2. On revient à  $f$  quelconque. Montrer que si la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0; 1]$ , alors  $f(0) = 0$ .

**Exercice 12.** Calculer la limite de  $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x dx$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .  
*On pourra utiliser l'inégalité  $\ln(1+u) \leq u$  valable pour tout  $u > -1$ .*