Problème du 11 mai 2016, durée 1h30.

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Partie I. Lemme des noyaux

Dans cette partie, on fixe un $\mathbb{C}$-espace, vectoriel E et u un endomorphisme de E. Etant donné $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ un élément de $\mathbb{C}[X]$, on note $P(u)$ l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k$ (on rappelle que u^k est défini par récurrence en posant $u^0 = id_E$ et $u^{k+1} = u \circ u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que l'on a, pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
2. Dans cette question, on se propose de démontrer un énoncé appelé *lemme des noyaux*. On fixe $P_1, \dots, P_k$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux. On pose $P = \prod_{i=1}^{k} P_k$.
   (a) On commence par supposer $k = 2$. On rappelle que le lemme de Bézout et le fait que P_1, P_2 sont premiers entre eux nous donne l'existence de deux polynômes Q_1, Q_2 tels que $Q_1P_1 + Q_2P_2 = 1$.
      i. Prouver que $Q_1(u) \circ P_1(u) + Q_2(u) \circ P_2(u) = id_E$, et en déduire que $\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$.
      ii. Montrer que, pour tout $x \in \ker(P_1P_2)(u)$, $(Q_1P_1)(u)(x) \in \ker P_2(u)$ et $(Q_2P_2)(u)(x) \in \ker P_1(u)$.
      iii. En déduire que $\ker(P_1P_2)(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$.
   (b) On revient au cas général. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer le lemme des noyaux :
   $$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u) \ .$$
3. Etant donnée une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on dira que f est dérivable si sa partie réelle f_0 et sa partie imaginaire f_1 sont toutes deux dérivables ; on note alors $f'(t) = f_0'(t) + i f_1'(t)$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $f \colon t \mapsto e^{\lambda t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \lambda e^{\lambda t}$.

Dans la suite, on admettra qu'on peut utiliser les formules habituelles pour la dérivée d'un produit ou d'une somme. On admettra également que, si f est dérivable n fois pour un $n \in \mathbb{N}^*$ alors $f^{(n)} = 0$ ssi f est une fonction polynômiale de dégré inférieur ou égal à $n - 1$; et que si $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f' = \lambda f$ alors f est de la forme $t \mapsto Ke^{\lambda t}$, où $K \in \mathbb{C}$ est une constante.

Partie II. Equations différentielles linéaires homogènes.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{C}^N$. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$f^{(N)} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k f^{(k)} = 0 \ ,$$

où l'inconnue $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction N fois dérivable. On note S_0 l'ensemble des solutions, E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dérivables une infinité de fois, et D

l'endomorphisme de E défini par $f \mapsto D(f) = f'$. On note P le polynôme $X^N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k$. On considère aussi la décomposition de P en polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{C}[X]$, qu'on écrit sous la forme $P(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{n_i}$, les λ_i étant deux à deux distincts.

1. Montrer que si $f \in S_0$ alors $f \in E$.
2. À l'aide du lemme des noyaux, prouver que $S_0 = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(D - \lambda_i id_E)^{n_i}$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer $\ker(D - \lambda id_E)^n$.
   (a) Pour $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on pose $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto f_\lambda(t) = f(t)e^{-\lambda t}$. Montrer par récurrence que $f \in \ker(D - \lambda id_E)^n$ si et seulement si $f_\lambda^{(n)} = 0$.
   (b) Montrer que $\ker(D - \lambda id_E)^n$ est l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$, où $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
4. En déduire que f appartient à S_0 si, et seulement si, il existe $Q_1 \in \mathbb{C}_{n_1-1}[X], \ldots, Q_k \in \mathbb{C}_{n_k-1}[X]$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $f(t) = \sum_{i=1}^{k} Q_i(t)e^{\lambda_i t}$.
5. Résoudre les équations différentielles suivantes.
   (a) $f^{(3)} - f'' - 12f' = 0$.
   (b) $f^{(4)} + 2f'' + f = 0$.

Partie III. Equations avec second membre.
Pour tout entier $m > 0$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_{m,\lambda}$ l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$, où $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$, on cherche à résoudre l'équation différentielle $f^{(N)} + \sum_{k=1}^{N} a_k f^{(k)} = b$, où $b \in E_{m_0,\lambda_0}$. On note S l'ensemble des solutions de cette équation. Comme précédemment, on note P le polynôme $X^N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k$. On considère aussi la décomposition de P en polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{C}[X]$, qu'on écrit sous la forme $P(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{n_i}$. On note encore S_0 l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

1. On fixe $m > 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer la dimension de $E_{m,\lambda}$.
2. Montrer que, si $f_0 \in S$, alors $S = f_0 + S_0$.
3. Pour $m > 0$, montrer que si $f \in E_{m,\lambda_0}$ alors $P(D)(f) \in E_{m,\lambda_0}$. On peut donc considérer l'endomorphisme $u_m \colon E_{m,\lambda_0} \to E_{m,\lambda_0}$ défini par $u_m(f) = P(D)(f)$. Pour simplifier, on suppose dans la suite que $\lambda_0 \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.
   (a) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\ker(u_m) = E_{m,\lambda_0} \cap S_0$.
   (b) En déduire que, pour $m \in \mathbb{N}^*$, u_m est un automorphisme de E_{m,λ_0}.
   (c) Montrer qu'il existe $f_0 \in S \cap E_{m_0,\lambda_0}$. Donner la forme générale des éléments de S.
4. Résoudre les équations différentielles suivantes.
   (a) $\forall t \in \mathbb{R} \quad f''(t) - f'(t) - 2f(t) = t^3$.
   (b) $\forall t \in \mathbb{R} \quad f^{(3)}(t) - 3f''(t) + 2f'(t) = e^{3t}$.