Problème du 11 mai 2016, corrigé.

Partie I. Lemme des noyaux

Dans cette partie, on fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et u un endomorphisme de E. Etant donné $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ un élément de $\mathbb{C}[X]$, on note $P(u)$ l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k$ (on rappelle que u^k est défini par récurrence en posant $u^0 = id_E$ et $u^{k+1} = u \circ u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

1. *Montrer que l'on a, pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.*

   Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} \beta_k X^k$. Alors $PQ = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_k \beta_j X^{k+j}$.

   On a
   $$\begin{aligned}(PQ)(u) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_k \beta_j u^{k+j} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_k \beta_j u^k \circ u^j \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k \circ \left(\sum_{j=0}^{m} \beta_j u^j \right) \quad \text{par linéarité de } u^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k \circ Q(u) = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k \right) \circ Q(u) \\ &= P(u) \circ Q(u).\end{aligned}$$

   De plus, $PQ = QP$ donc on en déduit que $(PQ)(u) = (QP)(u)$, et donc $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

2. Dans cette question, on se propose de démontrer un énoncé appelé *lemme des noyaux*. On fixe $P_1, \dots, P_k$ des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux. On pose $P = \prod_{i=1}^{k} P_k$.

   (a) On commence par supposer $k = 2$. On rappelle que le lemme de Bézout et le fait que P_1, P_2 sont premiers entre eux nous donne l'existence de deux polynômes Q_1, Q_2 tels que $Q_1 P_1 + Q_2 P_2 = 1$.

   i. *Prouver que $Q_1(u) \circ P_1(u) + Q_2(u) \circ P_2(u) = id_E$, et en déduire que $\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$.*

      On a $(Q_1 P_1 + Q_2 P_2)(u) = 1(u)$. Or $1(u) = id_E$ et par la question précédente, $(Q_1 P_1 + Q_2 P_2)(u) = Q_1(u) \circ P_1(u) + Q_2(u) \circ P_2(u)$. Ainsi, $Q_1(u) \circ P_1(u) + Q_2(u) \circ P_2(u) = id_E$.

      Soit $x \in \ker P_1(u) \cap \ker P_2(u)$. Alors $P_1(u)(x) = 0 = P_2(u)(x)$, donc $x = Q_1(u)\big(P_1(u)(x)\big) + Q_2(u)\big(P_2(u)(x)\big) = Q_1(u)(0) + Q_2(u)(0) = 0$. On a bien $\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$.

   ii. *Montrer que, pour tout $x \in \ker(P_1 P_2)(u)$, $(Q_1 P_1)(u)(x) \in \ker P_2(u)$ et $(Q_2 P_2)(u)(x) \in \ker P_1(u)$.*

Soit $x \in \ker(P_1P_2)(u)$. On a

$$\begin{aligned} P_2(u)\Big((Q_1P_1)(u)(x)\Big) &= (Q_1P_1)(u)\circ P_2(u)(x) \quad \text{par 1.} \\ &= Q_1(u)\circ(P_1P_2)(u)(x) \quad \text{encore par 1.} \\ &= Q_1(u)(0) \quad \text{car } x\in\ker(P_1P_2)(u) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $(Q_1P_1)(u)(x) \in \ker P_2(u)$.
De même $(Q_2P_2)(u)(x) \in \ker P_1(u)$.

iii. *En déduire que* $\ker(P_1P_2)(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$.
Montrons d'abord l'inclusion $\ker(P_1P_2)(u) \subset \ker P_1(u) + \ker P_2(u)$.
Soit $x \in \ker(P_1P_2)(u)$. Comme $Q_1(u)\circ P_1(u) + Q_2(u)\circ P_2(u) = id_E$, on a $x = (Q_1P_1)(u)(x) + (Q_2P_2)(u)(x)$ donc par ii., $x \in \ker P_1(u) + \ker P_2(u)$.
Montrons maintenant $\ker P_1(u) + \ker P_2(u) \subset \ker(P_1P_2)(u)$.
Soit $x \in \ker P_1(u) + \ker P_2(u)$. Alors $x = x_1 + x_2$ avec $P_1(u)(x_1) = 0$ et $P_2(u)(x_2) = 0$. On a

$$\begin{aligned} (P_1P_2)(u)(x) &= (P_1P_2)(u)(x_1) + (P_1P_2)(u)(x_2) \\ &= (P_2P_1)(u)(x_1) + (P_1P_2)(u)(x_2) \quad \text{par 1.} \\ &= P_2(u)\big(P_1(u)(x_1)\big) + P_1(u)\big(P_2(u)(x_2)\big) \\ &= P_2(u)(0) + P_1(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

On a donc l'égalité $\ker(P_1P_2)(u) = \ker P_1(u) + \ker P_2(u)$. De plus, on a montré en i. que $\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$, donc la somme est directe.

(b) *On revient au cas général. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer le lemme des noyaux :*

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u) \ .$$

Pour tout entier $k \geq 2$, on note H_k la propriété suivante : " pour tous polynômes $P_1, \dots, P_k$ de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux, si on note $P = \prod_{i=1}^k P_i$, alors $\ker P(u) = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$."
On a montré à la question (a)iii. que H_2 est vraie. Soit $k \geq 2$, supposons H_k vraie.
Soit $P_1, \dots, P_{k+1}$ des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux. On note $P = \prod_{i=1}^{k+1} P_i$ et $Q = \prod_{i=1}^{k} P_i$. Alors Q et P_{k+1} sont premiers entre eux donc en utilisant H_2 on a

$$\ker P(u) = \ker(QP_{k+1})(u) = \ker Q(u) \oplus \ker P_{k+1}(u).$$

De plus H_k étant vraie, on a $\ker Q(u) = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$ et donc

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u) \oplus \ker P_{k+1}(u) = \bigoplus_{i=1}^{k+1} \ker P_i(u).$$

La propriété est vraie au rang 2, elle est héréditaire, on en conclut donc par récurrence qu'elle est vraie à tout rang $k \geq 2$.

3. *Etant donnée une fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, on dira que f est dérivable si sa partie réelle f_0 et sa partie imaginaire f_1 sont toutes deux dérivables ; on note alors $f'(t)=f_0'(t)+if_1'(t)$. Montrer que, pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, la fonction $f\colon t\mapsto e^{\lambda t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'on a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)=\lambda e^{\lambda t}$.*

   Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et $f\colon t\mapsto e^{\lambda t}$. On écrit $\lambda=a+ib$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t)=e^{at}e^{ibt}=e^{at}\cos(bt)+ie^{at}\sin(bt)$, donc les parties réelle et imaginaire de f sont définies respectivement par $f_0\colon t\mapsto e^{at}\cos(bt)$ et $f_1\colon t\mapsto e^{at}\sin(bt)$. Les fonctions f_0 et f_1 sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$ (comme produits de fonctions dérivables) et pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f_0'(t)&=e^{at}(a\cos(bt)-b\sin(bt))\\ f_1'(t)&=e^{at}(a\sin(bt)+b\cos(bt)).\end{aligned}$$

   Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(t)&=e^{at}\left(a\cos(bt)-b\sin(bt)+ia\sin(bt)+ib\cos(bt)\right)\\ &=(a+ib)e^{at}\left(\cos(bt)+i\sin(bt)\right)\\ &=\lambda e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Dans la suite, on admettra qu'on peut utiliser les formules habituelles pour la dérivée d'un produit ou d'une somme. On admettra également que, si f est dérivable n fois pour un $n\in\mathbb{N}^*$ alors $f^{(n)}=0$ ssi f est une fonction polynômiale de dégré inférieur ou égal à $n-1$; et que si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est dérivable, $\lambda\in\mathbb{C}$ et $f'=\lambda f$ alors f est de la forme $t\mapsto Ke^{\lambda t}$, où $K\in\mathbb{C}$ est une constante.

Partie II. Equations différentielles linéaires homogènes.
Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et $a_0,\dots,a_{N-1}\in\mathbb{C}^N$. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$f^{(N)}+\sum_{k=0}^{N-1}a_kf^{(k)}=0\ ,$$

où l'inconnue $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est une fonction N fois dérivable. On note S_0 l'ensemble des solutions, E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dérivables une infinité de fois, et D l'endomorphisme de E défini par $f\mapsto D(f)=f'$. On note P le polynôme $X^N+\sum_{k=0}^{N-1}a_kX^k$. On considère aussi la décomposition de P en polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{C}[X]$, qu'on écrit sous la forme $P(X)=\prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{n_i}$, les λ_i étant deux à deux distincts.

1. *Montrer que si $f\in S_0$ alors $f\in E$.*

   Soit $f\in S_0$. Montrons que $f\in E$, c'est-à-dire que f est dérivable une infinité de fois. On va montrer par récurrence sur $n\geq N$ que f est dérivable n fois pour tout $n\geq N$.

   f étant dans S_0, f est dérivable N fois. Soit $n\geq N$. Supposons f dérivable n fois. Alors comme $f^{(N)}+\sum_{k=0}^{N-1}a_kf^{(k)}=0$, en dérivant $n-N$ fois, on a $f^{(n)}+\sum_{k=0}^{N-1}a_kf^{(k+n-N)}=0$, et donc $f^{(n)}=-\sum_{k=0}^{N-1}a_kf^{(k+n-N)}=0$. Or pour tout $k=0,\dots,N-1$, $n-N\leq k+n-N\leq n-1$, donc $f^{(k+n-N)}$ est dérivable et donc $f^{(n)}$ est dérivable : f est dérivable $n+1$ fois.

   On conclut par récurrence que f est de dérivable n fois pour tout n et donc f est dérivable une infinité de fois.

2. *À l'aide du lemme des noyaux, prouver que $S_0=\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k}\ker(D-\lambda_i id_E)^{n_i}$.*

Par définion de $P(D)$, on a $P(D) = D^N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k D^k$ et donc pour tout $f \in E$, $P(D)(f) = f^{(N)} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k f^{(k)}$.
À partir du résultat précédent et de la définition de S_0, on en déduit que

$$f \in S_0 \text{ si et seulement si } f \in E \text{ et } P(D)(f) = 0,$$

c'est-à-dire $S_0 = \ker P(D)$.
Or les λ_i étant deux à deux distincts, les facteurs $(X - \lambda_i)^{n_i}$ sont premiers entre eux deux à deux donc par le lemme des noyaux, on a $S_0 = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(D - \lambda_i id_E)^{n_i}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer $\ker(D - \lambda id_E)^n$.
   (a) *Pour $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on pose $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f_\lambda(t) = f(t)e^{-\lambda t}$. Montrer par récurrence que $f \in \ker(D - \lambda id_E)^n$ si et seulement si $f_\lambda^{(n)} = 0$.*
   On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n la propriété "pour tout $f \in E$, $f \in \ker(D - \lambda id_E)^n$ si et seulement si $f_\lambda^{(n)} = 0$".
   Montrons H_1. Soit $f \in E$. On a $f \in \ker(D - \lambda id_E)^1$ si et seulement si $(D - \lambda id_E)(f) = 0$ si et seulement si $f' - \lambda f = 0$. Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_\lambda'(t) = e^{-\lambda t}(f'(t) - \lambda f(t))$. Comme $e^{-\lambda t} \neq 0$ pour tout t (son module est $e^{at} > 0$), on en déduit l'équivalence $f \in \ker(D - \lambda id_E)^1$ si et seulement si $f_\lambda^{(1)} = 0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_n vraie. Soit $f \in E$. On écrit $(D - \lambda id_E)^{n+1}(f) = (D - \lambda id_E)^n\left((D - \lambda id_E)(f)\right) = (D - \lambda id_E)^n(f' - \lambda f)$. Ainsi, $f \in \ker(D - \lambda id_E)^{n+1}$ si et seulement si $f' - \lambda f \in \ker(D - \lambda id_E)^n$. En utilisant H_n, on en déduit

$$\begin{aligned} f \in \ker(D - \lambda id_E)^{n+1} &\iff \left((f' - \lambda f)_\lambda\right)^{(n)} = 0 \\ &\iff \left((f_\lambda)'\right)^{(n)} = 0 \end{aligned}$$

   car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(f' - \lambda f)_\lambda(t) = (f'(t) - \lambda f(t))e^{-\lambda t} = f_\lambda'(t)$.
   On a donc montré $f \in \ker(D - \lambda id_E)^{n+1}$ si et seulement si $f_\lambda^{(n+1)} = 0$.
   On conclut par récurrence que la propriété H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) *Montrer que $\ker(D - \lambda id_E)^n$ est l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$, où $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.*
   Par la propriété rappelée en fin de partie I, on a $f_\lambda^{(n)} = 0$ si et seulement si f_λ est un polynôme (à coefficients complexes) de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f \in \ker(D - \lambda id_E)^n &\iff (f_\lambda)^{(n)} = 0 \\ &\iff \text{il existe } Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R},\ f_\lambda(t) = Q(t) \\ &\iff \text{il existe } Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = Q(t)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

4. *En déduire que f appartient à S_0 si, et seulement si, il existe $Q_1 \in \mathbb{C}_{n_1-1}[X], \ldots, Q_k \in \mathbb{C}_{n_k-1}[X]$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $f(t) = \sum_{i=1}^{k} Q_i(t)e^{\lambda_i t}$.*
   Le résultat découle directement des résultats montrés aux questions 2 ; et 3.(b).
5. *Résoudre les équations différentielles suivantes.*

(a) $f^{(3)} - f'' - 12f' = 0$.
Le polynôme associé à cette équation est $P = X^3 - X^2 - 12X$. On écrit P comme produit de facteurs irréductibles : $P = X(X^2 - X - 12) = X(X-4)(X+3)$. Les trois racines $0, 4$ et -3 sont simples. On en déduit que

$$S_0 = \{t \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 e^{4t} + \lambda_3 e^{-3t},\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3\}.$$

(b) $f^{(4)} + 2f'' + f = 0$.
Le polynôme associé à cette équation est $P = X^4 + 2X^2 + 1$. On écrit P comme produit de facteurs irréductibles : $P = (X^2+1)^2 = (X-i)^2(X+i)^2$. Les deux racines i et $-i$ sont doubles. On en déduit que

$$S_0 = \{t \mapsto (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{it} + (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{-it},\ (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C}^4\}.$$

Partie III. Equations avec second membre.
Pour tout entier $m > 0$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $E_{m,\lambda}$ l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\lambda t}$, où $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$, on cherche à résoudre l'équation différentielle $f^{(N)} + \sum_{k=1}^{N} a_k f^{(k)} = b$, où $b \in E_{m_0,\lambda_0}$. On note S l'ensemble des solutions de cette équation. Comme précédemment, on note P le polynôme $X^N + \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k$. On considère aussi la décomposition de P en polynômes irréductibles unitaires dans $\mathbb{C}[X]$, qu'on écrit sous la forme $P(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{n_i}$. On note encore S_0 l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

1. *On fixe $m > 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer la dimension de $E_{m,\lambda}$.*
Notons pour tout entier naturel k, $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto t^k e^{\lambda t}$. $(1, X, \ldots, X^{m-1})$ étant une famille génératrice de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$, on a que $(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})$ est une famille génératrice de $E_{m,\lambda}$. Montrons que cette famille est libre. Soit $(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ tels que $a_0 g_0 + \ldots + a_{m-1} g_{m-1} = 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{m-1} t^{m-1})e^{\lambda t} = 0$. Or $e^{\lambda t} \neq 0$ pour tout t donc on obtient que le polynôme $\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ s'annule sur tous les réels, c'est donc le polynôme nul, *i.e.* $a_k = 0$ pour tout k.
Ainsi, $(g_0, g_1, \ldots, g_{m-1})$ est une base de $E_{m,\lambda}$ qui est donc de dimension m.
2. *Montrer que, si $f_0 \in S$, alors $S = f_0 + S_0$.*
Soit $f_0 \in S$. On a

$$\begin{aligned} f \in S \text{ si et seulement si } & f^{(N)} + \sum_{k=1}^{N} a_k f^{(k)} = b \\ \text{si et seulement si } & f^{(N)} + \sum_{k=1}^{N} a_k f^{(k)} = f_0^{(N)} + \sum_{k=1}^{N} a_k f_0^{(k)} \\ \text{si et seulement si } & (f - f_0)^{(N)} + \sum_{k=1}^{N} a_k (f - f_0)^{(k)} = 0 \\ \text{si et seulement si } & f - f_0 \in S_0. \end{aligned}$$

On a bien montré $S = f_0 + S_0$.
3. *Pour $m > 0$, montrer que si $f \in E_{m,\lambda_0}$ alors $P(D)(f) \in E_{m,\lambda_0}$. On peut donc considérer l'endomorphisme $u_m : E_{m,\lambda_0} \to E_{m,\lambda_0}$ défini par $u_m(f) = P(D)(f)$. Pour simplifier, on suppose dans la suite que $\lambda_0 \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.*
Soit $f \in E_{m,\lambda_0}$. Alors il existe $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = Q(t)e^{\lambda_0 t}$. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = (Q'(t) + \lambda_0 Q(t))e^{\lambda_0 t}$ et $Q' + \lambda_0 Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ donc $f' \in E_{m,\lambda_0}$. Une récurrence immédiate permet de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} \in E_{m,\lambda_0}$. Comme E_{m,λ_0} est un espace vectoriel, on en déduit que $P(D)(f) \in E_{m,\lambda_0}$.

4. (a) *Pour $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que* $\ker(u_m) = E_{m,\lambda_0} \cap S_0$.
   On a $f \in \ker(u_m)$ si et seulement si $f \in E_{m,\lambda_0}$ et $P(D)(f) = 0$ donc on a bien $\ker(u_m) = E_{m,\lambda_0} \cap S_0$.

   (b) *En déduire que, pour $m \in \mathbb{N}^*$, u_m est un automorphisme de E_{m,λ_0}.*
   On a montré (partie II) que $E_{m,\lambda_0} = \ker(D - \lambda_0 id_E)^m$ et $S_0 = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(D - \lambda_i id_E)^{n_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{n_i,\lambda_i}$, et aussi que pour $\lambda \neq \mu$, pour tous p, q, $E_{p,\lambda} \cap E_{q,\mu} = \{0\}$. Or $\lambda_0 \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, on en déduit donc que $\ker(u_m) = E_{m,\lambda_0} \cap S_0 = \{0\}$, *i.e.* u est injectif. u étant un endomorphisme de E_{m,λ_0}, de dimension finie, on en déduit que u est bijectif : u est un automorphisme de E_{m,λ_0}.

   (c) *Montrer qu'il existe $f_0 \in S \cap E_{m_0,\lambda_0}$. Donner la forme générale des éléments de S.*
   u_{m_0} étant un automorphisme de E_{m_0,λ_0}, il existe $f_0 \in E_{m_0,\lambda_0}$ tel que $u_{m_0}(f_0) = b$, c'est-à-dire $P(D)(f_0) = b$, ou encore $gf_0 \in S$.
   Ainsi, par 2., $S = f_0 + S_0$ et donc f appartient à S si, et seulement si, il existe $Q_1 \in \mathbb{C}_{n_1-1}[X], \dots, Q_k \in \mathbb{C}_{n_k-1}[X]$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait
   $$f(t) = f_0(t) + \sum_{i=1}^{k} Q_i(t) e^{\lambda_i t}.$$

5. *Résoudre les équations différentielles suivantes.*

   (a) $\forall t \in \mathbb{R} \quad f''(t) - f'(t) - 2f(t) = t^3$.
   Le polynôme P associé à cette équation est $P = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ donc
   $$S_0 = \{t \mapsto \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{2t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}.$$
   De plus, le second membre $b : t \mapsto t^3$ est de la forme $Q(t)e^{0.t}$ avec Q polynôme de degré 3. Ainsi il existe une solution particulière $f_0 : t \mapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$. On calcule alors pour tout t, $f_0'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$ et $f_0''(t) = 2a_2 + 6a_3 t$. Ainsi, $f_0 \in S$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(2a_2 - a_1 - 2a_0) + (6a_3 - 2a_2 - 2a_1)t + (-3a_3 - 2a_2)t^2 - 2a_3 t^3 = t^3$, ce qui équivaut au système
   $$\begin{cases} 2a_2 - a_1 - 2a_0 = 0 \\ 6a_3 - 2a_2 - 2a_1 = 0 \\ -3a_3 - 2a_2 = 0 \\ -2a_3 = 1 \end{cases}$$
   dont la solution est $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_1 = -\frac{9}{4}$, $a_0 = \frac{15}{8}$. Ainsi
   $$S = \left\{ t \mapsto -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{9}{4}t + \frac{15}{8} + \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{2t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

   (b) $\forall t \in \mathbb{R} \quad f^{(3)}(t) - 3f''(t) + 2f'(t) = e^{3t}$.
   Le polynôme P associé à cette équation est $P = X^3 - 3X + 2X = X(X-1)(X-2)$ donc
   $$S_0 = \{t \mapsto \lambda_1 + \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{2t},\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3\}.$$
   De plus, le second membre $b : t \mapsto e^{3t}$ est de la forme $Q(t)e^{3t}$ avec Q polynôme de degré 0. Ainsi il existe une solution particulière $f_0 : t \mapsto ae^{3t}$. On calcule alors pour

tout t, $f_0'(t) = 3ae^{3t}$, $f_0''(t) = 9ae^{3t}$ et $f^{(3)}(t) = 27ae^{-3t}$. Ainsi, $f_0 \in S$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $6ae^{3t} = e^{3t}$, ce qui équivaut à $a = \frac{1}{6}$. Ainsi

$$S = \left\{ t \mapsto \frac{1}{6}e^{3t} + \lambda_1 + \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{2t},\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3 \right\}.$$