Problème du 13 mai, corrigé

Le but de ce problème est de résoudre l'équation différentielle

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0. \tag{1}$$

Dans toute la suite, F désigne l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. *Questions préliminaires.* Soit Δ l'application, définie sur F, qui à une fonction f associe sa dérivée f'.
   (a) D'abord, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f' est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\Delta(F) \subset F$.
   De plus, pour tout $f, g \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda \Delta(f) + \Delta(g)$.
   Δ est donc linéaire.
   En conclusion c'est un endomorphisme de F.
   (b) Les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ sont toutes des éléments de F, dont l'image par Δ est la fonction nulle. L'endomorphisme Δ n'est donc pas injectif, ce n'est pas un automorphisme.

On considère le sous-ensemble E de F constitué des fonctions de la forme :

$$x \mapsto (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x, \text{ avec } a, b, c, d \text{ réels quelconques.}$$

On définit les quatre fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$: $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto x\cos x$, $f_3 : x \mapsto \sin x$, $f_4 : x \mapsto x \sin x$.

2. Les éléments de E sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on a bien $E \subset F$. De plus, on a de manière évidente que $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$, donc E est un sous-espace vectoriel de F.
   La famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est génératrice. Il reste à montrer que c'est une base. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que $\sum_{k=1}^{4} \lambda_k f_k = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\lambda_1 \cos x + \lambda_2 x \cos x + \lambda_3 \sin x + \lambda_4 x \sin x = 0.$$
   Pour $x = 0$, on obtient $\lambda_1 = 0$. Ensuite pour $x = \pi$, on obtient $\lambda_2 \times (-\pi) = 0$ donc $\lambda_2 = 0$. Avec $x = \pi/2$ et $x = -\pi/2$, on obtient le système
   $$\begin{cases} \lambda_3 + \frac{\pi}{2}\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + \frac{\pi}{2}\lambda_4 = 0 \end{cases}$$
   dont le déterminant vaut $\pi \neq 0$. Ainsi, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
   Le famille est libre et génératrice dans E, c'est une base de E.
3. Soit D la restriction de Δ à E.
   (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = -\sin x = -f_3(x)$, d'où $D(f_1) = -f_3$. On obtient de même $D(f_2) = f_1 - f_4$, $D(f_3) = f_1$ et $D(f_4) = f_2 + f_3$.
   (b) On vient de montrer que pour tout $j = 1, \dots, 4$, $D(f_j) \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, on en déduit que $D(E) \subset E$. De plus, D est linéaire comme restriction d'une application linéaire, donc D est un endomorphisme de E.
   (c) Notons A la matrice de D dans la base $\mathcal{B}$. Le calcul fait à la question précédente montre que
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Soit $\varphi \in \ker D$. Il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que $\varphi = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k f_k$. Alors

$$D(\varphi) = 0 = (\lambda_2 + \lambda_3) f_1 + \lambda_4 f_2 + (-\lambda_1 + \lambda_4) f_3 - \lambda_2 f_4.$$

Comme $\mathcal{B}$ est une famille libre, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire facilement que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Ainsi $\ker D = \{0\}$ et D est injective. De plus, E est de dimension finie (égale à 4), donc D est une bijection de E sur E.

4. On note Id_E l'application identité de E.

(a) Calculons $(D^2 + Id_E)(f_j)$ pour $j = 1, 2, 3, 4$. On a

$$\begin{aligned}
(D^2 + Id_E)(f_1) &= D(-f_3) + f_1 = -f_1 + f_1 = 0, \\
(D^2 + Id_E)(f_2) &= D(f_1 - f_4) + f_2 = -f_3 - f_2 - f_3 + f_2 = -2f_3, \\
(D^2 + Id_E)(f_3) &= D(f_1) + f_3 = -f_3 + f_3 = 0, \\
(D^2 + Id_E)(f_4) &= D(f_2 + f_3) + f_4 = f_1 - f_4 + f_1 - f_4 = 2f_1.
\end{aligned}$$

Soit $\varphi \in E$. Il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que $\varphi = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k f_k$. Alors, le calcul que l'on vient de faire donne

$$(D^2 + Id_E)(\varphi) = -2\lambda_2 f_3 + 2\lambda_4 f_1. \tag{2}$$

Ainsi, on a $\varphi \in \ker(D^2 + Id_E)$ si et seulement si $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$ (la famille (f_1, f_3) est libre). On en déduit que $\ker(D^2 + Id_E) = \mathrm{Vect}(f_1, f_3)$. Donc (f_1, f_3) est une base de $\ker(D^2 + Id_E)$ et $\ker(D^2 + Id_E)$ est de dimension 2.

(b) Le calcul (**??**) de la question précédente montre que $\mathrm{Im}(D^2 + Id_E) = \mathrm{Vect}(f_1, f_3)$. Ainsi, (f_1, f_3) est une base de $\mathrm{Im}(D^2 + Id_E)$ et $\mathrm{Im}(D^2 + Id_E)$ est de dimension 2.

(c) On a

$$\begin{aligned}
(D^2 + Id_E)^2 &= (D^2 + Id_E) \circ (D^2 + Id_E) \\
&= D^2 \circ D^2 + D^2 \circ Id_E + Id_E \circ D^2 + Id_E \circ Id_E \\
&= D^4 + 2D^2 + Id_E.
\end{aligned}$$

Soit $\varphi \in E$. Si on note $\psi = (D^2 + Id_E)(\varphi)$, alors $\psi \in \mathrm{Im}(D^2 + Id_E) = \ker(D^2 + Id_E)$, donc $(D^2 + Id_E)(\psi) = 0$, *i.e.* $(D^4 + 2D^2 + Id_E)(\varphi) = 0$.
Ainsi, $D^4 + 2D^2 + Id_E$ est l'application nulle de E.

(d) Comme $D^4 + 2D^2 + Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a $D \circ (-D^3 - 2D) = Id_E$. Ainsi, D est bijective et $D^{-1} = -D^3 - 2D$.

5. On note V le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.

(a) Par définition de V, (Id_E, D^2) est une famille génératrice de V. De plus, D^2 n'est pas proportionnelle à l'identité (par exemple parce que $D^2(f_2) = -f_2 - 2f_3$ qui n'est pas colinéaire à f_2), donc la famille (Id_E, D^2) est libre, par conséquent c'est une base de V.

(b) Soit φ et ψ deux éléments de V. Alors il existe $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ des réels tels que $\varphi = \alpha Id_E + \beta D^2$ et $\psi = \lambda Id_E + \mu D^2$. On a donc

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi &= (\alpha Id_E + \beta D^2) \circ (\lambda Id_E + \mu D^2) \\
&= \alpha\lambda Id_E + (\beta\lambda + \alpha\mu) D^2 + \beta\mu D^4 \\
&= \alpha\lambda Id_E + (\beta\lambda + \alpha\mu) D^2 + \beta\mu(-2D^2 - Id_E) \\
&= (\alpha\lambda - \beta\mu) Id_E + (\beta\lambda + \alpha\mu - 2\beta\mu) D^2.
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi \circ \psi$ est encore un élément de V.

(c) Soit M l'application qui à un élément de V, $\varphi = \alpha Id_E + \beta D^2$ associe $M(\varphi) = \alpha - \beta$.
On a $M : V \to \mathbb{R}$. Montrons que M est linéaire. En reprenant les notations de la question précédentes, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} M(x\varphi + \psi) &= M\Big((x\alpha + \lambda)Id_E + (x\beta + \mu)D^2\Big) \\ &= (x\alpha + \lambda) - (x\beta + \mu) \\ &= x(\alpha - \beta) + (\lambda - \mu) = xM(\varphi) + M(\psi). \end{aligned}$$

Ainsi, M est une forme linéaire sur V. De plus, toujours avec les mêmes notations

$$\begin{aligned} M(\varphi \circ \psi) &= M\Big((\alpha\lambda - \beta\mu)Id_E + (\beta\lambda + \alpha\mu - 2\beta\mu)D^2\Big) \\ &= \alpha\lambda - \beta\lambda - \alpha\mu + \beta\mu \\ &= (\alpha - \beta)(\lambda - \mu) \\ &= M(\varphi)M(\psi). \end{aligned}$$

6. (a) L'équation différentielle : $y''(x)+y(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$ est une équation du second ordre, linéaire, homogène, à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ dont les racines sont $\pm i$. L'ensemble des solutions est donc le sous-espace vectoriel de F engendré par $f_1 : x \mapsto \cos x$ et $f_3 : x \mapsto \sin x$, c'est-à-dire que les solutions sont les fonctions de la forme :

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a\cos x + b\sin x,\ \text{avec } a, b \text{ des réels quelconques.}$$

(b) Pour tout $y \in F$, on a $(\Delta^2+Id_F)(y) = y''+y$ donc le noyau de Δ^2+Id_F est précisément l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+y = 0$, *i.e.* $\ker(\Delta^2+Id_F) = \mathrm{Vect}(f_1, f_3)$.

(c) Soit $y \in F$. On a

$y \in \ker(\Delta^2 + Id_F)^2$ si et seulement si $(\Delta^2 + Id_F)(y) \in \ker(\Delta^2 + Id_F)$
si et seulement si $y'' + y \in \mathrm{Vect}(f_1, f_3)$
si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y''(x) + y(x) = a\cos x + b\sin x. \tag{3}$$

C'est une équation différentielle du second ordre, linéaire, non homogène, à coefficients constants. On connaît les solutions de l'équation homogène, il suffit pour résoudre (**??**) de déterminer une solution particulière. On cherche y_p solution de $y_p'' + y_p = af_1 + bf_3$. On la cherche sous la forme $y_p = Af_2 + Bf_4$. Alors, comme $y_p \in E$, on a par la question 4, $y_p'' + y_p = (D^2 + Id_E)(y_p) = 2Bf_1 - 2Af_3$. Ainsi $y_p = -\frac{b}{2}f_1 + \frac{a}{2}f_3$ convient.
On en déduit que les solutions de (**??**) sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto c\cos x + d\sin x - \frac{b}{2}x\cos x + \frac{a}{2}x\sin x,\ a, b, c, d \text{ des réels quelconques.}$$

On vient de montrer que $\ker(\Delta^2 + Id_F)^2 = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4) = E$.

(d) Comme précédemment avec D, on calcule $(\Delta^2 + Id_F)^2 = \Delta^4 + 2\Delta^2 + Id_F$. Comme pour tout $y \in F$, $(\Delta^4 + 2\Delta^2 + Id_F)(y) = y^{(4)} + 2y'' + y$, on déduit de ce qui précède que l'espace des solutions de (**??**) est exactement le noyau de $(\Delta^2 + Id_F)^2$ c'est-à-dire E.