Problème du 13 mai, durée 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Le but de ce problème est de résoudre l'équation différentielle

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0. \tag{1}$$

Dans toute la suite, F désigne l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. *Questions préliminaires.* Soit Δ l'application, définie sur F, qui à une fonction f associe sa dérivée f'.
   (a) Montrer que Δ est un endomorphisme de F.
   (b) Est-ce que Δ est un endomorphisme bijectif ?

   On considère le sous-ensemble E de F constitué des fonctions de la forme :

   $$x \mapsto (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x, \text{ avec } a, b, c, d \text{ des réels quelconques.}$$

   On définit les quatre fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$: $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto x\cos x$, $f_3 : x \mapsto \sin x$, $f_4 : x \mapsto x\sin x$.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F, et que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.
3. Soit D la restriction de Δ à E.
   (a) Calculer $D(f_j)$ pour $j = 1, 2, 3, 4$.
   (b) Montrer que D est un endomorphisme de E.
   (c) (Bonus) Donner la matrice de D dans la base $\mathcal{B}$.
   (d) Déterminer $\ker D$. En déduire que D est une bijection de E sur E.
4. On note Id_E l'application identité de E.
   (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de $D^2 + Id_E$, où D^2 désigne l'endomorphisme $D \circ D$. *Plus généralement, si T est un endomorphisme, et $k \in \mathbb{N}^*$, $T^k = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{k \text{ fois}}$.*
   (b) Déterminer une base et la dimension de l'image de $D^2 + Id_E$.
   (c) En déduire que $D^4 + 2D^2 + Id_E$ est l'application nulle de E.
   (d) Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.
5. On note V le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.
   (a) Justifier que (Id_E, D^2) est une base de V.
   (b) Vérifier que V est stable pour le produit de composition des applications, *i.e.* si φ et ψ sont deux éléments de V alors $\varphi \circ \psi$ est encore un élément de V.
   (c) Soit M l'application qui à un élément de V, $\varphi = \alpha Id_E + \beta D^2$ associe le réel $M(\varphi) = \alpha - \beta$. Montrer que M est une application linéaire et que pour tout $\varphi, \psi \in V$,

   $$M(\varphi \circ \psi) = M(\varphi)M(\psi).$$
6. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.
   (b) Déterminer le noyau de $\Delta^2 + Id_F$.
   (c) Montrer que le noyau de $(\Delta^2 + Id_F)^2$ est E.
   (d) Montrer que E est exactement l'espace des solutions de (1).