Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015
Cursus préparatoire/CCP, $1^{\text{ère}}$ année

Problème du 22 avril, durée 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Dans tout ce problème, a désigne un réel non nul. On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
On note E l'espace vectoriel formé par les suites réelles. Un élément de E est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.
La partie I étudie le cas où P est constant. La partie II étudie le cas où $a \neq 1$. La partie 3 étudie le cas où $a = 1$.

—— Partie I ——

Dans cette partie, on pose

$$E_a = \{u \in E \colon \exists b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = au_n + b\} \ .$$

1. Si $u \in E_a$ alors par définition il existe b tel que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'un tel b est unique. Dans la suite on note $b = b_u$.
2. Dans cette question, on suppose que $a = 1$. Soit $u \in E_1$. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

   Dans la suite de cette partie a est supposé différent de 1.
3. Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de E.
4. On définit les suites réelles x et y par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = a^n.$$

   (a) Montrer que x et y sont des éléments de E_a et déterminer les valeurs de b_x et b_y.
   (b) Montrer que (x, y) est une famille libre de E_a.
5. Soit $u \in E_a$. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 & = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 & = u_1 \end{cases} .$$

6. Montrer que, pour λ et μ comme dans la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda x_n + \mu y_n \ .$$

7. Donner une base et la dimension de E_a.

—— Partie II ——

Dans cette partie on suppose $a \neq 1$ et on fixe un entier naturel p. On définit

$$E_a^{(p)} = \{u \in E \colon \exists P \in \mathbb{R}_p[X]\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = au_n + P(n)\}$$

1. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Par définition, il existe un polynôme P tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + P(n)$. Montrer qu'un tel polynôme est unique. Dans la suite, on note $P = P_u$.
3. Montrer que les éléments de $E_a^{(p)}$ pour lesquels $P_u = 0$ sont exactement les multiples de la suite y définie dans la partie I, question 4.
4. On considère maintenant
$$F_a^{(p)} = \{u \in E_a^{(p)} \colon u_0 = 0\}\ .$$
On admet que c'est un sous-espace vectoriel de $E_a^{(p)}$. Montrer que, pour $u, v \in F_a^{(p)}$, on a $P_u = P_v$ si et seulement si $u = v$.
5. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ il existe un unique $u \in F_a^{(p)}$ tel que $P = P_u$.
6. *(*Question difficile)* Montrer que $F_a^{(p)}$ est de dimension $p + 1$.
7. Montrer que
$$E_a^{(p)} = F_a^{(p)} \oplus \mathrm{Vect}(y)\ .$$
Indication. Utiliser $v \in F_a^{(p)}$ tel que $P_v = P_u$.
8. Donner la dimension de $E_a^{(p)}$.
9. On définit, pour $k \in \{0, \dots, p\}$, une suite $x^{(k)}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n^{(k)} = n^k$.
   (a) Montrer que $x^{(k)} \in E_a^{(p)}$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$.
   (b) Montrer que la famille $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.
10. Application : déterminer la suite u vérifiant les relations $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 2n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

—— Partie III ——

Dans cette partie on suppose que $a = 1$.

1. En adaptant le raisonnement de la partie précédente, donner une base de l'espace vectoriel
$$E_1^{(p)} = \{u \in E \colon \exists P \in \mathbb{R}_p[X]\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + P(n)\}$$
2. Application : déterminer la suite (u_n) vérifiant les relations $u_0 = -2$, et $u_{n+1} = u_n - 6n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.