Sujet CCP du 3 mai : correction.

Problème 1.
Dans tout le problème on pose $f(t) = e^{-t^2} \int_0^t e^{x^2} dx$ *pour* $t \in \mathbb{R}$.

1. *Justifier que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.
La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Le théorème fondamental de l'analyse nous permet d'affirmer que $t \mapsto \int_0^t e^{x^2} dx$ est une primitive de f et est donc également de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent, f est de classe C^∞ en tant que produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. *Montrer que* f *est impaire.*
A l'aide du changement de variable (linéaire bijectif) $u = -x$ on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$ que
$$\begin{aligned}\int_0^t e^{x^2} dx &= \int_0^{-t} e^{(-u)^2} (-du) \\ &= -\int_0^{-t} e^{u^2} du\end{aligned}$$
On en déduit que
$$\forall t \in \mathbb{R} \ f(t) = e^{-t^2} \int_0^t e^{x^2} = e^{(-t)^2} (-\int_0^{-t} e^{u^2} du) = -f(-t) \ .$$
On vient de montrer que f est impaire.
3. *Montrer que* f *est solution de l'équation différentielle*
$$y' + 2ty = 1 \qquad (E)$$
La formule pour la dérivée d'un produit, alliée au théorème fondamental de l'analyse, nous permet d'affirmer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
$$\begin{aligned}f'(t) &= -2te^{-t^2} \int_0^t e^{x^2} + e^{-t^2} e^{t^2} \\ &= -2tf(t) + 1\end{aligned}$$
On obtient comme attendu que $f'(t) + 2tf(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qu'il fallait démontrer.
4. *A l'aide de* f*, déterminer toutes les solutions de* (E)*. Montrer que* f *est la seule solution de* (E) *telle que* $y(0) = 0$*, et que* f *est la seule solution impaire de* (E).
On vient de trouver une solution particulière de (E) ; les solutions de l'équation homogène $y' + 2ty = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{-t^2}$ pour $C \in \mathbb{R}$, donc les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto f(t) + Ce^{-t^2}$.
En particulier, si y est une solution de (E) telle que $y(0) = 0$, on a à la fois $y(t) = f(t) + Ce^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$ pour une constante C, et $y(0) = 0 = f(0)$, ce dont on déduit que $C = 0$ et donc $y = f$.
De même, si y est impaire alors, en partant du fait que $y(t) = f(t) + Ce^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}$ on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$ que
$$y(-t) = f(-t) + Ce^{(-t)^2} = -f(t) + Ce^{-t^2} \ .$$
Ainsin, si $y(-t) = -y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $Ce^{-t^2} = -Ce^{(-t^2)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $C = 0$ et $y = f$: la seule solution impaire de (E) est f.

5. *Expliquer pourquoi f admet un développement limité à l'ordre n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'on écrit sous la forme*
$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n)$$
On a vu que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et la formule de Taylor-Young entraîne qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

6. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit aussi le développement limité de f' à l'ordre n en 0, qu'on écrit*
$$f'(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k + o(t^n)$$
Justifier le fait que $b_k = (k+1)a_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et en particulier $\mathcal{C}^1$, le théorème d'intégration des développements limités nous dit que l'on peut calculer le développement limité de l'ordre f à l'ordre $n+1$ en 0 en intégrant le développement limité de f' à l'ordre n : on a
$$f(t) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1} t^{k+1} + o(t^{n+1})\,.$$
Par unicité d'un développent limité, on en déduit que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a $\frac{b_k}{k+1} = a_{k+1}$, autrement dit $b_k = (k+1)a_{k+1}$. Ceci étant vrai pour tout n on a démontré que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $b_k = (k+1)a_{k+1}$.

7. *En utilisant le fait que f est solution de (E), établir une relation entre a_k et a_{k+2} pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f' + 2tf = 1$, on peut écrire
$$\sum_{k=0}^{n} b_k t^k + 2t \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n) = 1\ .$$
Ainsi,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)a_{k+1} t^k + \sum_{k=0}^{n} a_k t^{k+1} = 1 + o(t^n)\,.$$
En décalant les indices pour pouvoir regrouper les sommes, ceci nous donne
$$a_1 + \sum_{k=0}^{n-1} ((k+2)a_{k+2} + a_k) t^{k+1} + a_n t^{n+1} = 1 + o(t^n)\,.$$
Notons que ci-dessus on a écrit le terme $a_n t^{n+1}$ simplement pour rendre le calcul plus compréhensible : ce terme est négligeable devant t^n et on n'avait donc pas besoin de l'écrire dans l'égalité ci-dessus.
Par unicité d'un développement limité, on déduit de l'égalité ci-dessus que $a_1 = 1$ et $(k+2)a_{k+2} + a_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$; ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a montré que $(k+2)a_{k+2} + a_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

8. *Donner la valeur de a_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
Comme f est impaire on sait que $a_{2k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Reste à calculer la valeur de a_{2k+1} ; puisque $a_1 \neq 0$ et $k+2 \neq 0$ pour tout k on commence par montrer par récurrence que $a_{2k+1} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ensuite on peut écrire pour tout $k \in \mathbb{N}$ que
$$a_{2k+1} = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{a_{2j+1}}{a_{2j-1}} \right) a_1 = \prod_{j=1}^{k} \frac{-1}{2j+1} = (-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{2j+1} = (-1)^k \frac{2^k k!}{(2k+1)!}\ .$$

Problème 2. *Dans cet exercice, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont deux fois dérivables et solutions de l'équation différentielle :*
$$y'' + 2ty' + t^2 y = 0 \qquad (H)$$

1. *Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
   La fonction nulle est bien un élément de $\mathcal{E}$. Ensuite, on fixe $y_1, y_2 \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, et on doit vérifier que $y = \alpha y_1 + y_2 \in \mathcal{E}$, ce qui se fait en calculant, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y''(t) + 2ty'(t) + t^2 y(t) &= (\alpha y_1 + y_2)''(t) + 2t(\alpha y_1 + y_2)'(t) + t^2(\alpha y_1 + y_2)(t) \\ &= \alpha(y_1''(t) + 2ty_1'(t) + t^2 y_1(t)) + (y_2''(t) + 2ty_2'(t) + t^2 y_2(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   On vient de montrer que $y \in \mathcal{E}$, qui est donc bien un sous-espace vectoriel.
2. *Étant donnée $f \in \mathcal{E}$, on définit une fonction $\tilde{f}$ en posant*

$$\tilde{f}(t) = f'(t) + tf(t)\,.$$

   Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{E}$.
   Soit $f \in \mathcal{E}$. Notons déjà que $f'' = -2tf' - t^2 f$ est dérivable, et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$f^{(3)}(t) = -2tf''(t) - 2f'(t) - t^2 f'(t) - 2tf(t)\,.$$

   Donc $\tilde{f}$ est bien deux fois dérivable (en fait on montre facilement par récurrence que f est dérivable une infinité de fois sur $\mathbb{R}$). Ensuite on s'arme de patience et on calcule les dérivées de $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}'(t) = f''(t) + f(t) + tf'(t)\,;$$
$$\tilde{f}''(t) = f^{(3)}(t) + 2f'(t) + tf''(t) = -tf''(t) - t^2 f'(t) - 2tf(t)\,.$$

   Ensuite on regroupe : pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \tilde{f}''(t) + 2t\tilde{f}'(t) + t^2\tilde{f}(t) &= (-tf''(t) - t^2 f'(t) - 2tf(t)) + 2t(f''(t) + f(t) + tf'(t)) + t^2(f'(t) + tf(t)) \\ &= t(f''(t) + 2tf'(t) + t^2 f(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   On définit alors une application $U\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ en posant $U(f) = \tilde{f}$. On admet que U est linéaire.
3. *Montrer que U est une symétrie, c'est-à-dire $U^2 = id$.*
   Soit $f \in \mathcal{E}$. Par définition, on a

$$U^2(f) = U(U(f)) = U(t \mapsto f'(t) + tf(t))\ .$$

   Donc pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} U^2(f)(t) &= f''(t) + f(t) + tf'(t) + t(f'(t) + tf(t)) \\ &= (f''(t) + 2tf'(t) + t^2 f(t)) + f(t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

   On a donc bien $U^2(f) = f$, c'est-à-dire $U^2 = id$.
   On rappelle qu'alors on a

$$\mathcal{E} = \ker(U -\ id) \oplus \ker(U +\ id)\,.$$

4. *On note $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathcal{E}$ et solutions de l'équation différentielle*

$$y' + (t-1)y = 0 \qquad (H_1)$$

   et $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des fonctions appartenant à $\mathcal{E}$ et solutions de l'équation différentielle

$$y' + (t+1)y = 0 \qquad (H_2)$$

   Montrer, à l'aide du résultat rappelé dans la question précédente, que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$.
   Il suffit de remarquer que $f \in \ker(U -\ id)$ si et seulement si $U(f) - f = f$, c'est-à-dire si et seulement si $f' + tf = f$, ce qui est équivalent à dire que f est solution de (H_1). Ainsi, $\mathcal{E}_1 = \ker(U -\ id)$. On montre de même que $\mathcal{E}_2 = \ker(U +\ id)$, et on a donc

$$\mathcal{E} = \ker(U -\ id) \oplus \ker(U +\ id) = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2\ .$$

5. *Résoudre les équations différentielles* (H_1) *et* (H_2)*. En déduire toutes les solutions de* (H)*.*

   Les solutions de $y' + (t-1)y = 0$ sont les fonctions de la forme $y \mapsto Ce^{t-\frac{t^2}{2}}$, où C est une constante réelle ; et les solutions de $y' + (t+1y) = 0$ sont les fonctions de la forme $y \mapsto Ce^{-t-\frac{t^2}{2}}$ où C est une constante réelle. On déduit alors du résultat de la question précédente que les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $t \mapsto C_1e^{t-\frac{t^2}{2}} + C_2e^{-t-\frac{t^2}{2}}$, où C_1, C_2 sont des constantes réelles.

6. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle*

$$y'' + 2ty' + t^2y = t^4 + 2\,.$$

   On voit que si y_1, y_2 sont solutions de cette équation différentielle alors $y_1 - y_2$ est solution de (H) ; et si y_1 est solution de l'équation ci-dessus, y_2 est solution de (H) alors y_1+y_2 est solution de notre équation. Par conséquent, si on arrive à trouver une solution f de $y''+2ty'+t^2y = t^4+2$, les solutions de cette équation seront toutes les fonctions de la forme $t \mapsto f(t)+C_1e^{t-\frac{t^2}{2}}+C_2e^{-t-\frac{t^2}{2}}$, où C_1, C_2 sont des constantes réelles. Pour trouver une solution particulière, on est optimiste et on la cherche sous forme polynomiale ; vu les degrés notre seul espoir est qu'il existe une solution de la forme $f\colon t \mapsto at^2 + bt + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a alors $f'(t) = 2at + b$ et $f''(t) = 2a$, donc f est solution si et seulement si on a

$$2a + 2t(2at + b) + t^2(at^2 + bt + c) = t^4 + 2$$

   pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est équivalent à

$$at^4 + bt^3 + (2a + c)t^2 + 2bt + 2a = t^4 + 2$$

   pour tout $t \in \mathbb{R}$. En identifiant les coefficients, on voit que cette égalité est vérifiée dès que $a = 1$, $b = 0$, $2a + c = 0$, $2b = 0$ et $2a = 2$, autrement dit dès que $a = 1$ et $c = -\frac{1}{2}$. On vient de montrer que $t \mapsto t^2 - \frac{1}{2}$ est solution de notre équation, et finalement ses solutions sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto t^2 - \frac{1}{2} + C_1e^{t-\frac{t^2}{2}} + C_2e^{-t-\frac{t^2}{2}}$, où C_1, C_2 sont des constantes réelles.