Problème du 22 avril, corrrigé

Dans tout ce problème, a désigne un réel non nul. On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
On note E l'espace vectoriel formé par les suites réelles. Un élément de E est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.
La partie I étudie le cas où P est constant. La partie II étudie le cas où $a \neq 1$. La partie 3 étudie le cas où $a = 1$.

—— Partie I ——

Dans cette partie, on pose

$$E_a = \{u \in E \colon \exists b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = au_n + b\} .$$

1. Si $u \in E_a$ alors par définition il existe b tel que $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $b = u_1 - au_0$, ce qui détermine b de manière unique.
2. Dans cette question, on suppose que $a = 1$. Soit $u \in E_1$. Alors, il existe b tel que $u_{n+1} = u_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $b = u_1 - u_0$, et par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = nb + u_0 = n(u_1 - u_0) + u_0$.

   Dans la suite de cette partie a est supposé différent de 1.
3. Montrons que E_a est un sous-espace vectoriel de E.
   D'abord, la suite nulle est dans E_a (avec $b = 0$). Ensuite, soit $(u, v) \in E_a^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Notons $w = \lambda u + \mu v$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} \\ &= \lambda(au_n + b_u) + \mu(av_n + b_v) \\ &= a(\lambda u_n + \mu v_n) + (\lambda b_u + \mu b_v) \\ &= aw_n + (\lambda b_u + \mu b_v). \end{aligned}$$

   Ainsi, $w \in E_a$, avec $b_w = \lambda b_u + \mu b_v$.
   On en déduit que E_a est est un sous-espace vectoriel de E.
4. On définit les suites réelles x et y par :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 1, \\ &\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = a^n. \end{aligned}$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 = a \times 1 + (1-a)$, *i.e.* $x_{n+1} = ax_n + (1-a)$ donc $x \in E_a$ avec $b_x = 1 - a$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{n+1} = a \times a^n$, *i.e.* $y_{n+1} = ay_n$ donc $y \in E_a$ avec $b_y = 0$.

   (b) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda x + \mu y = 0$, *i.e.* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda x_n + \mu y_n = 0$. En particulier, pour $n = 0$ et $n = 1$, on a

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda + a\mu &= 0 \end{cases} .$$

   Le déterminant de ce système en (λ, μ) vaut $1 - a \neq 0$, donc la seule solution est $(0, 0)$. Ainsi, la famille (x, y) est libre.

5. Soit $u \in E_a$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Le système $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 & = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 & = u_1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \lambda + \mu & = u_0 \\ \lambda + a\mu & = u_1 \end{cases}$. Comme à la question précédente, le déterminant de ce système vaut $1 - a \neq 0$ donc il admet une unique solution donnée par $\lambda = \frac{au_0 - u_1}{1-a}$, $\mu = \frac{u_1 - u_0}{1-a}$.
6. Soit λ et μ comme dans la question précédente. On veut montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda x_n + \mu y_n = \lambda + \mu a^n \ .$$
On procède par récurrence sur n. La propriété est vraie au rang $n = 0$ par la question 5.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \lambda + \mu a^n$. Alors, $u_{n+1} = au_n + b_u = a\lambda + \mu a^{n+1} + b_u$. Or,
$$\begin{aligned} b_u &= u_1 - au_0 = \lambda + a\mu - a(\lambda + \mu) \text{ par la question 5,} \\ &= \lambda - a\lambda, \end{aligned}$$
d'où $u_{n+1} = \lambda + \mu a^{n+1}$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
7. On vient de montrer que pour tout $u \in E_a$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$, *i.e.* $u = \lambda x + \mu y$. Ainsi, la famille (x, y) est une famille génératrice de E_a. On a vu qu'elle était aussi libre, c'est donc une base de E_a.

—— Partie II ——

Dans cette partie on suppose $a \neq 1$ et on fixe un entier naturel p. On définit
$$E_a^{(p)} = \{u \in E \colon \exists P \in \mathbb{R}_p[X] \ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = au_n + P(n)\}$$

1. Montrons que $E_a^{(p)}$ est un sous-espace vectoriel de E.
D'abord, la suite nulle est dans $E_a^{(p)}$ (avec $P = 0$). Ensuite, soit $(u, v) \in (E_a^{(p)})^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe deux polynômes P et Q dans $\mathbb{R}_p[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = au_n + P(n), \quad v_{n+1} = av_n + Q(n).$$
Notons $w = \lambda u + \mu v$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} \\ &= \lambda(au_n + P(n)) + \mu(av_n + Q(n)) \\ &= a(\lambda u_n + \mu v_n) + (\lambda P(n) + \mu Q(n)) \\ &= aw_n + (\lambda P(n) + \mu Q(n)). \end{aligned}$$
Comme $\lambda P + \mu Q$ est un polynôme de dégré inférieur ou égal à p, $w \in E_a^{(p)}$.
On en déduit que $E_a^{(p)}$ est est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Supposons qu'il existe deux polynômes P et Q tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + P(n) = au_n + Q(n)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = Q(n)$. Le polynôme $P - Q$ a donc une infinité de racines (tous les entiers naturels), on en déduit que $P - Q$ est le polynôme nul, *i.e.* $P = Q$. D'où l'unicité du polynôme tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + P(n)$.
3. Soit $u \in E_a^{(p)}$ tel que $P_u = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$, donc par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 a^n$. Ce qui signifie $u = u_0\, y$.
Réciproquement, si $u = \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n$ donc $u \in E_a^{(p)}$ avec $P_u = 0$.
4. On considère maintenant
$$F_a^{(p)} = \{u \in E_a^{(p)} \colon u_0 = 0\} \ .$$
On admet que c'est un sous-espace vectoriel de $E_a^{(p)}$. Soit $u, v \in F_a^{(p)}$. Supposons que $P_u = P_v$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = v_n$ pour tout n.
Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 = v_0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n = v_n$. Alors
$$u_{n+1} = au_n + P_u(n) = av_n + P_v(n) = v_{n+1}.$$
Réciproquement, si $u = v$ on a bien sûr $P_u = P_v$.

5. Soit $P \in \mathbb{R}_p[X]$. On définit $u \in E$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n) \end{cases}.$$

Alors il est immédiat que $u \in F_a^{(p)}$ avec $P = P_u$. Une telle suite u est unique par la question 4.

6. *(*Question difficile)* Montrons que $F_a^{(p)}$ est de dimension $p+1$.
Pour cela, on construit une base de $F_a^{(p)}$ en utilisant une base de $\mathbb{R}_p[X]$ et la question précédente. Pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$, on note $v^{(k)}$ l'élément de $F_a^{(p)}$ tel que $P_{v^{(k)}} = X^k$, *i.e.*

$$\begin{cases} v_0^{(k)} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}^{(k)} = av_n^{(k)} + n^k \end{cases}.$$

Montrons que $(v^{(0)}, \dots, v^{(p)})$ est une base de $F_a^{(p)}$, ce qui montrera bien que $F_a^{(p)}$ est de dimension $p+1$.
Cette famille est génératrice : si $u \in F_a^{(p)}$, alors P_u s'écrit $P_u = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$, et on montre par une récurrence immédiate que $u = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k v^{(k)}$.
De plus, cette famille est libre : s'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ tels que $\sum_{k=0}^{p} \alpha_k v^{(k)} = 0$, alors $u = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k v^{(k)}$ est un élément de $F_a^{(p)}$ associé au polynôme $P_u = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k$ (par la question 1), et aussi au polynôme nul, puisque $u = 0$. Par unicité, $\sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k = 0$ et donc $(1, X, \dots, X^p)$ étant une base de $\mathbb{R}_p[X]$, $\alpha_k = 0$ pour tout $k = 0, \dots, p$.

Autre preuve, en utilisant une application linéaire (ce qu'on vient de faire sans vraiment le dire...) : on définit $\varphi : \begin{array}{ccc} F_a^{(p)} & \to & \mathbb{R}_p[X] \\ u & \mapsto & P_u \end{array}$. Le calcul fait à la question 1 montre que φ est linéaire et la question 4 montre que φ est bijective. On en déduit que $F_a^{(p)}$ a la même dimension que $\mathbb{R}_p[X]$.

7. Montrons que

$$E_a^{(p)} = F_a^{(p)} \oplus \mathrm{Vect}(y)\ .$$

Soit $u \in E_a^{(p)}$. Par la question 5, il existe $v \in F_a^{(p)}$ tel que $P_v = P_u$. Alors, $u - v \in E_a^{(p)}$ avec $P_{u-v} = P_u - P_v = 0$ donc par la question 3, $u - v = (u_0 - v_0)y = u_0 y$. Ainsi, $u = v + u_0 y$. On vient de montrer que $E_a^{(p)} = F_a^{(p)} + \mathrm{Vect}(y)$.
Montrons que $F_a^{(p)} \bigcap \mathrm{Vect}(y) = \{0\}$. Soit $u \in F_a^{(p)} \bigcap \mathrm{Vect}(y)$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha y$, et $u_0 = 0$. Or $\alpha = u_0$ donc on en déduit que u est la suite nulle.
Ainsi, $E_a^{(p)} = F_a^{(p)} \oplus \mathrm{Vect}(y)$.

8. On a donc $\dim E_a^{(p)} = \dim F_a^{(p)} + \dim \mathrm{Vect}(y) = p + 1 + 1 = p + 2$.

9. On définit, pour $k \in \{0, \dots, p\}$, une suite $x^{(k)}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n^{(k)} = n^k$.
   (a) Soit $k \in \{0, \dots, p\}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}^{(k)} - ax_n^{(k)} = (n+1)^k - an^k = P^{(k)}(n)$, où $P^{(k)}(X) = (X+1)^k - aX^k$ est un polynôme de dégré inférieur ou égal à p. Ceci montre bien que $x^{(k)} \in E_a^{(p)}$.
   (b) La famille $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ contient $p+2$ éléments donc pour montrer que c'est une base de $E_a^{(p)}$, il suffit de montrer que cette famille est libre.
   Supposons qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_p, \mu$ des réels tels que $w = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^{(k)} + \mu y = 0$.
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k n^k + \mu a^n = 0$. Etudions le comportement de w_n quand $n \to +\infty$.
   Si $|a| > 1$, le terme prépondérant dans la somme est μa^n : $w_n \sim_{+\infty} \mu a^n$, on en déduit donc que $\mu = 0$. Ensuite le terme dominant est $\lambda_p n^p$, d'où l'on déduit $\lambda_p = 0$, etc jusqu'à $\lambda_0 = 0$.
   Si $|a| < 1$, on commence par montrer que $\lambda_p = 0$, ...jusqu'à $\lambda_0 = 0$, puis $\mu = 0$.
   Dans tous les cas, on en déduit que la famille est libre.

10. Application : déterminons la suite u vérifiant les relations $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 2n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a $u \in E_2^{(1)}$ et on vient de montrer que $(x^{(0)}, x^{(1)}, y)$ est une base de $E_2^{(1)}$ donc il existe λ_0, λ_1 et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_0 + \lambda_1 n + \mu 2^n$. On injecte dans la relation de récurence définissant u et on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_0 + \mu = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, (\lambda_0 + \lambda_1) + \lambda_1 n = 2\lambda_0 + 5 + (2\lambda_1 - 2)n \end{cases},$$

d'où

$$\begin{cases} \lambda_0 + \mu = -2 \\ \lambda_0 + \lambda_1 = 2\lambda_0 + 5 \\ \lambda_1 = 2\lambda_1 - 2 \end{cases},$$

et donc $\lambda_1 = 2$, $\lambda_0 = -3$, $\mu = 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3 + 2n + 2^n$.

—— Partie III ——

Dans cette partie on suppose que $a = 1$.

1. On cherche une base de l'espace vectoriel

$$E_1^{(p)} = \{u \in E \colon \exists P \in \mathbb{R}_p[X]\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + P(n)\}.$$

On peut reprendre le raisonnement de la partie II. La seule chose qui diffère est que l'ensemble des $u \in E_1^{(p)}$ tels que $P_u = 0$ est exactement l'ensemble des multiples de x, la suite constante égale à 1, renommée $x^{(0)}$ à la fin de la partie II. On a encore $F_1^{(p)}$ de dimension $p+1$, $E_1^{(p)} = F_1^{(p)} \oplus \mathrm{Vect}(x)$, et $E_1^{(p)}$ de dimension $p+2$.
Déterminons une base "simple" de $F_1^{(p)}$. Montrons que $(x^{(1)}, \dots, x^{(p+1)})$ convient, où les suites $x^{(k)}$ sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n^{(k)} = n^k$.
Vérifions que $x^{(k)} \in F_1^{(p)}$ pour tout $k = 1, \dots, p+1$. C'est évident pour $k \leq p$. Pour $k = p+1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = (n+1-n)\sum_{j=0}^{p}(n+1)^{p-j}n^j = \sum_{j=0}^{p}(n+1)^{p-j}n^j = Q(n)$$

où Q est bien un polynôme de dégré inférieur ou égal à p. Ainsi, $x^{(p+1)} \in F_1^{(p)}$.
La famille $(x^{(1)}, \dots, x^{(p+1)})$ contient $p+1 = \dim F_1^{(p)}$ éléments donc il suffit de montrer qu'elle est libre, ce qui se fait comme à la question II-9. Ainsi, c'est une base de $F_1^{(p)}$.
On en déduit que $(x, x^{(1)}, \dots, x^{(p+1)})$ est une base de $E_1^{(p)}$.

2. Application : déterminons la suite (u_n) vérifiant les relations $u_0 = -2$, et $u_{n+1} = u_n - 6n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a $u \in E_1^{(1)}$ donc, par la question 1, il existe λ_0, λ_1 et λ_2 tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_0 + \lambda_1 n + \lambda_2 n^2$. On injecte dans la relation de récurrence définissant u et on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \lambda_0 + \lambda_1(n+1) + \lambda_2(n+1)^2 = \lambda_0 + \lambda_1 n + \lambda_2 n^2 - 6n + 1 \end{cases},$$

d'où

$$\begin{cases} \lambda_0 = -2 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_0 + 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_1 - 6 \end{cases},$$

et donc $\lambda_0 = -2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_1 = 4$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2 + 4n - 3n^2$.