Problème du 30 mars 2016.

Problème.

1. *Autour des suites récurrentes d'ordre 2.* On note $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   (a) On considère l'ensemble E formé par toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   i. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles, et que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations $a_n = \rho^n$, $b_n = (-\rho)^{-n}$ appartiennent à E.*

   La suite nulle est bien un élément de E ; considérons deux éléments de E u, v et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(\lambda u + v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= \lambda(u_{n+1} + u_n) + (v_{n+1} + v_n) \\ &= (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + (\lambda u_n + v_n) \\ &= (\lambda u + v)_{n+1} + (\lambda u + v)_n\end{aligned}$$

   Ceci montre que $\lambda u + v$ appartient à E, qui est donc bien un sous-espace vectoriel. Vérifions que $a \in E$: pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = \rho^n(\rho^2 - \rho - 1) = \frac{\rho^n}{4}(1 + 5 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5} - 4) = 0 \ .$$

   Donc $a \in E$. De même, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$b_{n+2} - b_{n+1} - b_n = (-\rho)^{-n-2}(1 + \rho - \rho^2) = 0 \ .$$

   ii. *Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments de E tels que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ alors $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   Fixons u et v satisfaisant l'hypothèse, et raisonnons par récurrence forte pour montrer que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est vrai pour $n = 0, 1$; supposons que $n \geq 1$ soit tel que l'égalité soit vraie pour tout $k \leq n$. Alors on a

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} = v_n + v_{n-1} = v_{n+1} \ .$$

   L'égalité est donc vraie aussi au rang $n + 1$, et on en conclut qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   iii. *Montrer que pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ il existe $\rho, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n = \lambda\rho^n + \mu(-\rho)^{-n}$.*

   Soit $u \in E$. Si on veut trouver λ et μ comme dans l'énoncé, alors ils doivent déjà satisfaire la condition pour $n = 0, 1$, c'est-à-dire qu'on doit avoir $\begin{cases} \lambda + \mu &= u_0 \\ \lambda\rho - \frac{\mu}{\rho} &= u_1 \end{cases}$.

   Ce système a une solution unique (les deux équations ne sont pas proportionnelles), qu'on note (λ, μ) ; considérons la suite $w = \lambda a + \mu b$. On a $w_0 = u_0$, $w_1 = u_1$ par choix de λ, μ ; de plus $w \in E$ puisque c'est une combinaison linéaire d'éléments de l'espace vectoriel E. Le résultat de la question précédente nous permet donc de conclure que $w = u$, et on a comme espéré $u_n = \lambda\rho^n + \mu(-\rho)^{-n}$ pour tout n.

iv. *Donner une base et la dimension de E.*
On vient de voir que tout élément de E est une combinaison linéaire de a, b. De plus, a et b ne sont pas proportionnelles ($a_0 = b_0 = 1$, et $a_1 \neq b_1$), et forment donc une famille libre de E. Ainsi, (a, b) est à la fois génératrice et libre : c'est une base de E, qui est par conséquent de dimension 2.

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E tel que $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$.

i. *Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\rho^n + \mu(-\rho)^{-n}$.*
Le résultat obtenu en (1(a)iii) nous donne l'existence de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda\rho^n + \mu(-\rho)^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Reste à montrer que $\lambda > 0$, ce qui vient du système $\begin{cases} \lambda + \mu & = u_0 \\ \lambda\rho - \frac{\mu}{\rho} & = u_1 \end{cases}$. On en déduit $\lambda = \dfrac{u_0 + \rho u_1}{1 + \rho^2} > 0$.

ii. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \lambda\rho^n - |\mu|$.*
Notons que $\rho \geq 1$, par conséquent $\rho^{-n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|\mu(-\rho)^{-n}| \leq |\mu|$, ce qui entraîne que $\mu(-\rho)^{-n} \geq -|\mu|$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda\rho^n + \mu(-\rho)^{-n} \geq \lambda\rho^n - |\mu| \ .$$

(c) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que : $s_0 < 1$, $s_1 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $s_{n+2} = s_{n+1}s_n$.

i. *On suppose $s_0 = 0$ ou $s_1 = 0$. Donner la valeur de s_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
Montrons par récurrence que $s_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. C'est vrai pour s_2, puisque $s_2 = s_0 s_1$; supposons que $n \geq 2$ soit tel que $s_n = 0$, alors on a $s_{n+1} = s_n s_{n-1} = 0$, et on obtient la conclusion souhaitée.

ii. *On suppose maintenant $s_0 > 0$ et $s_1 > 0$. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq Ce^{-\lambda\rho^n}$.*
Indication. On utilisera la suite $u_n = -\ln s_n$.
Suivons l'indication de l'énoncé et considérons $u_n = -\ln(s_n)$; commençons, pour justifier cela, par remarquer qu'une démonstration par récurrence forte permet de vérifier que $s_n > 0$ pour tout n, et donc que u_n est bien définie. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+2} = -\ln(s_{n+2}) = -\ln(s_n s_{n+1}) = -\ln(s_n) - \ln(s_{n+1}) = u_n + u_{n+1} \ .$$

Puisque u_0 et u_1 sont > 0 (s_0, s_1 appartiennent à $]0, 1[$), on peut appliquer le résultat de la question précédente et obtenir qu'il existe $\lambda > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \geq \lambda\rho^n - |\mu|$. Comme $s_n = e^{-u_n}$, en posant $C = e^{|}\mu|$ (qui est > 0) on obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n \leq e^{|\mu| - \lambda\rho^n} = Ce^{-\lambda\rho^n} \ .$$

(d) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que : $r_0 < 1$, $r_1 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $r_{n+2} \leq r_{n+1}r_n$.

i. *En utilisant la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $s_0 = r_0$, $s_1 = r_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $s_{n+2} = s_{n+1}s_n$, montrer qu'il existe $C > 0$ et $\lambda > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq Ce^{-\lambda\rho^n}$.*
Commençons par montrer par récurrence forte que $r_n \leq s_n$ pour tout n. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$; supposons que $n \geq 1$ soit tel que cette propriété soit vérifiée pour tout $k \leq n$. Alors on a

$$r_{n+1} = r_n r_{n-1} \leq s_n s_{n-1} = s_{n+1} \ .$$

(Remarquons que pour obtenir l'inégalité ci-dessus on a utilisé le fait que r_n et r_{n+1} sont positifs et majorés par s_n et s_{n+1} respectivement)

ii. *En déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Puisque $r_n \leq s_n$ pour tout n, et que (s_n) satisfait les hypothèses de la question précédente, on obtient l'existence de $\lambda > 0$ et $C > 0$ tels que $r_n \leq Ce^{-\lambda\rho^n}$, qui tend vers 0. Comme (r_n) est supposée positive, le théorème des gendarmes nous permet de conclure que r_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2. *Différences divisées.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f''(x)| \leq M$.

On pose pour tous réels x_1, x_2, x_3 deux à deux distincts

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$
$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}.$$

(a) *Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. Montrer qu'il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f[x_1, x_2] = f'(c)$.*

Comme f est C^2 sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$, et on peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis, qui nous permet de conclure qu'il existe c tel que $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$, ce qu'on voulait démontrer.

(b) *Soit x_1, x_2 et x_3 trois réels tels que $x_1 < x_2 < x_3$. Montrer qu'il existe $y \in]x_1, x_2[$ et $z \in]x_2, x_3[$ tels que*

$$f[x_1, x_2] = f'(x_2) + \frac{f''(y)}{2}(x_1 - x_2) \quad \textit{et} \quad f[x_2, x_3] = f'(x_2) - \frac{f''(z)}{2}(x_2 - x_3).$$

En déduire que

$$|f[x_1, x_2, x_3]| \leq \frac{M}{2}.$$

Le fait que f soit C^2 nous permet d'appliquer la formule de Tayor-Lagrange (à l'ordre 2 cette fois ; à la question précédente on l'a appliquée à l'ordre 1) sur les intervalles $[x_1, x_2]$ et $[x_2, x_3]$, ce qui nous donne l'existence de $y \in]x_1, x_2[$ et $z \in]x_2, x_3[$ tels que

$$f(x_1) = f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) + \frac{f''(y)}{2}(x_1 - x_2)^2 \; ; \; f(x_3) = f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2) + \frac{f''(z)}{2}(x_3 - x_2)^2 \, .$$

En regroupant et en divisant par $x_1 - x_2, x_2 - x_3$ respectivement (les deux sont non nuls) on obtient

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_2) + \frac{f''(y)}{2}(x_1 - x_2) \quad \text{et} \quad \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} = f'(x_2) - \frac{f''(z)}{2}(x_2 - x_3).$$

Ceci nous donne bien les deux premières égalités demandées ; en revenant à la définition de $f[x_1,x_2,x_3]$, on obtient

$$\begin{aligned}
|f[x_1,x_2,x_3]| &= \left|\frac{f'(x_2)+\frac{f''(y)}{2}(x_1-x_2)-f'(x_2)+\frac{f''(z)}{2}(x_2-x_3)}{x_1-x_3}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{f''(y)}{2}(x_1-x_2)+\frac{f''(z)}{2}(x_2-x_3)}{x_1-x_3}\right| \\
&\leq \frac{\left|\frac{f''(y)}{2}\right|(x_2-x_1)+\left|\frac{f''(z)}{2}\right|(x_3-x_2)}{x_3-x_1} \\
&\leq \frac{M}{2}\frac{x_2-x_1+x_3-x_2}{x_3-x_1} \\
&= \frac{M}{2}\ .
\end{aligned}$$

On admettra que cette majoration est valide pour tous réels x_1, x_2, x_3.

3. *Méthode de la sécante.* Soit a, b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$. On suppose de plus que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.
   (a) i. *Montrer que, sur $[a, b]$, il n'existe qu'une seule solution de l'équation $f(x) = 0$.*
   Puisque f' ne s'annule pas, et est continue par hypothèse, f' ne change pas de signe ; par conséquent, f est strictement monotone, et donc injective : pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe au plus un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = t$. Ceci s'applique en particulier pour $t = 0$.
   ii. *On note $m = \min_{y\in[a,b]} |f'(y)|$ et $M = \max_{y\in[a,b]} |f''(y)|$. Justifier que m et M sont bien définis, m et M sont finis et $m > 0$.*
   Les fonctions $|f'|$ et $|f''|$ sont continues sur $[a, b]$ par hypothèse ; puisque $[a, b]$ est un segment, ces deux fonctions sont bornées et atteignent leurs bornes. Ceci montre que m et M sont bien définis, et sont deux réels positifs. Puisqu'il existe $t \in [a, b]$ tel que $|f'(t)| = m$, et que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$, on voit aussi que $m > 0$.

   La méthode de la sécante est un algorithme permettant le calcul d'une valeur approchée de la solution x à $f(x) = 0$. Pour cela, on construit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :

$$y_0 \neq y_1 \in [a,b], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f[y_{n-1},y_n]}. \tag{1}$$

   Dans toute la suite, on supposera que la suite $(y_n)_n$ est bien définie, à valeurs dans $[a, b]$, et que $y_n \neq x$ pour tout n.

   (b) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{aligned}
y_{n+1}-x &= (y_n-x)\left(1-\frac{f[y_n,x]}{f[y_{n-1},y_n]}\right) \\
&= (y_n-x)(y_{n-1}-x)\frac{f[y_{n-1},y_n,x]}{f[y_{n-1},y_n]}
\end{aligned}$$

   Par définition (et en utilisant, à la deuxième ligne ci-dessous le fait que $f(x) = 0$), on a

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - x &= y_n - \frac{f(y_n)}{f[y_{n-1}, y_n]} - x \\
&= y_n - x - \frac{f(y_n) - f(x)}{f[y_{n-1}, y_n]} \\
&= (y_n - x)\left(1 - \frac{f[y_n, x]}{f[y_{n-1}, y_n]}\right) \\
&= (y_n - x)\frac{f[y_{n-1}, y_n] - f[y_n, x]}{f[y_{n-1}, y_n]} \\
&= (y_n - x)(y_{n-1} - x)\frac{f[y_{n-1}, y_n, x]}{f[y_{n-1}, y_n]} \ .
\end{aligned}$$

(c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \frac{M}{2m}|y_n - x|$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$r_{n+1} \leq r_n r_{n-1}.$$

Rappelons qu'on a vu que $|f[y_{n-1}, y_n, x]| \leq \frac{M}{2}$; de plus, l'égalité des accroissements finis permet de conclure que $|f[y_{n-1}, y_n]| \geq m$. Par conséquent, l'égalité obtenue à la question précédente nous donne

$$|y_{n+1} - x| \leq |y_n - x||y_{n-1} - x|\frac{M}{2m} \ .$$

En multipliant les deux termes de cette égalité par $\frac{M}{2m}$, on obtient bien

$$r_{n+1} \leq r_n r_{n-1} \ .$$

(d) *En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|y_0 - x| < \eta$ et $|y_1 - x| < \eta$, alors la suite $(y_n)_n$ converge vers x.*

Dès lors que $0 < r_0 < 1$ et $0 < r_1 < 1$, on est en situation pour appliquer le résultat de (1(d)ii) pour conclure que (r_n) converge vers 0, ce qui est équivalent à dire que (y_n) converge vers x. Etant donnée la définition de r_0, r_1, on peut donc conclure que (y_n) converge vers x dès lors que $|y_0 - x|$ et $|y_1 - x|$ sont strictement inférieurs à $\frac{2m}{M}$. En posant $\eta = \frac{2m}{M}$, on obtient bien le résultat demandé par l'énoncé.