Problème du 25 mars, durée 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Partie I - Valuation d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels presque nulle. La valuation de P est définie par

$$\operatorname{val} P = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} & \text{si } P \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes non nuls. Montrer que $\operatorname{val}(P+Q) \geq \min(\operatorname{val} P, \operatorname{val} Q)$.
2. Donner deux polynômes non nuls P et Q tels que $P+Q \neq 0$ et $\operatorname{val}(P+Q) > \min(\operatorname{val} P, \operatorname{val} Q)$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\operatorname{val} P = 0$ si et seulement si $P(0) \neq 0$.

On rappelle le résultat suivant : si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont deux polynômes non nuls, alors $\operatorname{val}(PQ) = \operatorname{val} P + \operatorname{val} Q$.

Partie II - Division selon les puissances croissantes et développement limité d'un quotient

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant, et de l'utiliser pour calculer le développement limité d'un quotient.

Théorème 1 (Division selon les puissances croissantes)**.** *Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes tels que $\operatorname{val} B = 0$, soit $p \in \mathbb{N}$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que*

$$A = BQ + X^{p+1}R, \quad \deg Q \leq p. \tag{1}$$

On appelle Q et R le quotient et le reste de la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre p.

1. Dans cette question, on fixe $A, B \in \mathbb{R}[X]$, avec $\operatorname{val} B = 0$.
   (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer l'unicité du couple (Q, R) vérifiant (1).
   (b) En raisonnant par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, montrer l'existence du couple (Q, R) vérifiant (1).
2. *Des exemples.* Dans les deux cas suivants, calculer le quotient et le reste de la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre p indiqué.
   On pourra "poser" la division comme on le fait pour la division euclidienne "classique".
   (a) $A = 1 + X + X^2$, $B = 1 - 2X$, $p = 1$.
   (b) $A = 3 + 4X - X^3$, $B = 1 - 2X + X^3$, $p = 2$.
3. *Application aux développements limités.*
   (a) Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes tels que $\operatorname{val} B = 0$, soit $p \in \mathbb{N}$. On note Q le quotient de la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre p. Montrer que l'on a le développement limité suivant de la fonction rationnelle $\dfrac{A(x)}{B(x)}$:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^p).$$

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant les développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \underset{x \to 0}{o}(x^p), \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p + \underset{x \to 0}{o}(x^p)$$

avec $b_0 \neq 0$. On note $A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$, $B(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p$, et Q le quotient de la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre p.

i. Montrer que $f(x) = B(x)\Big(Q(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^p)\Big)$ et $g(x) = B(x)\Big(1 + \underset{x \to 0}{o}(x^p)\Big)$.

ii. Montrer que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^p).$$

(c) *Un exemple.* En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $h \colon x \mapsto \dfrac{\cos x}{e^x}$.

Partie III - Développements limités des fonctions réciproques

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de valuation égale à 1. On écrit $P(X) = a_1 X + \ldots + a_d X^d$, avec $a_1, \ldots, a_d$ des réels, $a_1 \neq 0$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1 X)^n - \big(P(X)\big)^n$ est un polynôme de valuation supérieure ou égale à $n+1$.

(b) Déterminer deux polynômes Q_1 et R_1 de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$X = Q_1(P(X)) + R_1(X), \quad \deg Q_1 \leq 1 < \operatorname{val} R_1.$$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des polynômes Q_n et R_n de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$X = Q_n(P(X)) + R_n(X), \quad \deg Q_n \leq n < \operatorname{val} R_n. \tag{2}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et continue. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la forme : $f(x) = a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$, avec $a_1 \neq 0$.

(a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

(b) Calculer $f^{-1}(0)$.

(c) Montrer que $y = a_1 f^{-1}(y) + \underset{y \to 0}{o}\left(f^{-1}(y)\right)$. En déduire que

$$f^{-1}(y) \underset{y \to 0}{\sim} \frac{y}{a_1}.$$

(d) On note $P(X) = a_1 X + \ldots + a_n X^n$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$x = Q_n(P(x)) + \underset{x \to 0}{o}(x^n), \quad \deg Q_n \leq n.$$

(e) Montrer que

$$Q_n(f(x)) = Q_n(P(x)) + \underset{x \to 0}{o}(x^n).$$

(f) Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la forme :

$$f^{-1}(y) = Q_n(y) + \underset{y \to 0}{o}(y^n).$$