Université Claude Bernard - Lyon 1
Cursus préparatoire/CCP, 1ère année
Semestre de printemps 2014-2015

Problème du 25 mars, corrigé

Partie I - Valuation d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels presque nulle. La valuation de P est définie par

$$\operatorname{val} P = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \neq 0\} & \text{si } P \neq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes non nuls. On a $\operatorname{val} P \in \mathbb{N}$, $\operatorname{val} Q \in \mathbb{N}$. On écrit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$, avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels presque nulles. Alors, $P + Q = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) X^n$.
   Si $\operatorname{val} P = 0$ ou $\operatorname{val} Q = 0$, on a bien $\operatorname{val}(P+Q) \geq 0 = \min(\operatorname{val} P, \operatorname{val} Q)$. Sinon, $\min(\operatorname{val} P, \operatorname{val} Q) \geq 1$ et pour tout entier n tel que $n < \min(\operatorname{val} P, \operatorname{val} Q)$, $a_n = 0$ et $b_n = 0$ donc $a_n + b_n = 0$. Ainsi, $\operatorname{val}(P+Q) \geq \min(\operatorname{val} P, \operatorname{val} Q)$.
2. On pose $P = X + 1$ et $Q = X - 1$. Alors, $P + Q = 2X \neq 0$ et $\operatorname{val}(P+Q) = 1 > 0 = \min(\operatorname{val} P, \operatorname{val} Q)$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$. On a $\operatorname{val} P = 0$ si et seulement si $a_0 \neq 0$ si et seulement si $P(0) \neq 0$ (en effet, $a_0 = P(0)$).

Partie II - Division selon les puissances croissantes et développement limité d'un quotient

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant, et de l'utiliser pour calculer le développement limité d'un quotient.

Théorème 1 (Division selon les puissances croissantes)**.** *Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes tels que $\operatorname{val} B = 0$, soit $p \in \mathbb{N}$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que*

$$A = BQ + X^{p+1} R, \quad \deg Q \leq p. \tag{1}$$

On appelle Q et R le quotient et le reste de la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre p.

1. Dans cette question, on fixe $A, B \in \mathbb{R}[X]$, avec $\operatorname{val} B = 0$. On note $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$, avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de réels presque nulles.
   (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe deux couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) vérifiant (1). Alors, $B(Q_1 - Q_2) = X^{p+1}(R_2 - R_1)$. Or, si $Q_1 - Q_2 \neq 0$,

   $$\operatorname{val}(B(Q_1 - Q_2)) = \operatorname{val} B + \operatorname{val}(Q_1 - Q_2) = \operatorname{val}(Q_1 - Q_2) \leq \deg(Q_1 - Q_2) \leq p$$

   et $\operatorname{val}(X^{p+1}(R_2 - R_1)) \geq p + 1$, ce qui contredit l'égalité entre les deux polynômes. Ainsi, $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.
   D'où l'unicité du couple (Q, R) vérifiant (1).

(b) Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, que la propriété

$$\mathcal{P}(p) : \quad \text{il existe un couple } (Q, R) \text{ tel que } A = BQ + X^{p+1}R, \quad \deg Q \leq p$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Montrons $\mathcal{P}(0)$. On a $b_0 \neq 0$, donc on peut définir $Q = \dfrac{a_0}{b_0}$. Alors $\deg Q \leq 0$ et $A - BQ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{b_n a_0}{b_0}\right) X^n$ s'écrit bien sous la forme XR, $R \in \mathbb{R}[X]$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. Il existe (Q, R) tel que $A = BQ + X^{p+1}R$ et $\deg Q \leq p$. On écrit $R = r_0 + X\tilde{R}$, avec $\tilde{R} \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$B \times \frac{r_0}{b_0} X^{p+1} = r_0 X^{p+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n r_0}{b_0} X^{n+p+1} = r_0 X^{p+1} + X^{p+2} S(X),$$

avec $S \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\begin{aligned} A &= B\left(Q + \frac{r_0}{b_0} X^{p+1}\right) - X^{p+2} S(X) + X^{p+2} \tilde{R}(x) \\ &= BQ_{p+1} + X^{p+2} R_{p+1} \end{aligned}$$

avec $Q_{p+1} = Q + \frac{r_0}{b_0} X^{p+1}$ de degré $\leq p+1$ et $R_{p+1} = \tilde{R} - S$. $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

2. *Des exemples.*

(a) Cas $A = 1 + X + X^2$, $B = 1 - 2X$, $p = 1$: on écrit les étapes successives comme pour une division "classique"

$$\begin{array}{cccccc|c} & 1 & + & X & + & X^2 & 1 - 2X \\ \cline{7-7} - & 1 & - & 2X & & & 1 + 3X \\ \cline{2-6} & & & 3X & + & X^2 & \\ - & & & 3X & - & 6X^2 & \\ \cline{4-6} & & & & & 7X^2 & \end{array}$$

Ici, on a donc $Q = 1 + 3X$, $R = 7$.

(b) Cas $A = 3 + 4X - X^3$, $B = 1 - 2X + X^3$, $p = 2$:

$$\begin{array}{cccccccccc|c} & 3 & + & 4X & & & - & X^3 & & & 1 - 2X + X^3 \\ \cline{11-11} - & 3 & - & 6X & & & + & 3X^3 & & & 3 + 10X + 20X^2 \\ \cline{2-8} & & & 10X & & & - & 4X^3 & & & \\ - & & & 10X & - & 20X^2 & & & + & 10X^4 & \\ \cline{4-10} & & & & & 20X^2 & - & 4X^3 & - & 10X^4 & \\ - & & & & & 20X^2 & - & 40X^3 & & & + \; 20X^5 \\ \cline{6-11} & & & & & & & 36X^3 & - & 10X^4 & - \; 20X^5 \end{array}$$

Ici, on a donc $Q = 3 + 10X + 20X^2$, $R = 36 - 10X - 20X^2$.

3. *Application aux développements limités.*

(a) Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes tels que $\operatorname{val} B = 0$, soit $p \in \mathbb{N}$. On note Q le quotient de la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre p, et R le reste. Alors, $A = BQ + X^{p+1}R$ donc $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + x^{p+1}\dfrac{R(x)}{B(x)}$. Or, $\operatorname{val} B = 0$ donc $B(0) \neq 0$ et $\dfrac{R(x)}{B(x)}$ admet une limite finie quand $x \to 0$, et on a bien $x^{p+1}\dfrac{R(x)}{B(x)} = x^p \left(x\dfrac{R(x)}{B(x)}\right) = o_{x \to 0}(x^p)$. Ainsi,

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \underset{x \to 0}{o}(x^p).$$

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant les développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \underset{x \to 0}{o}(x^p), \quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p + \underset{x \to 0}{o}(x^p)$$

avec $b_0 \neq 0$. On note $A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$, $B(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_p x^p$, et Q le quotient de la division de A par B selon les puissances croissantes à l'ordre p.

i. Comme $f(x) = A(x) + o_{x\to 0}(x^p)$ et comme par (a), $A(x) = B(x)\Big(Q(x) + o_{x\to 0}(x^p)\Big)$, on a $f(x) = B(x)\Big(Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^p)\Big) + \underset{x\to 0}{o}(x^p)$. Comme $B(0) \neq 0$,

$$f(x) = B(x)\Big(Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^p)\Big).$$

Ensuite, $g(x) = B(x) + o_{x\to 0}(x^p) = B(x)\Big(1 + \frac{1}{B(x)}\, o_{x\to 0}(x^p)\Big)$. Comme $B(0) \neq 0$, $\frac{1}{B(x)}\, o_{x\to 0}(x^p) = o_{x\to 0}(x^p)$ et donc $g(x) = B(x)\Big(1 + \underset{x\to 0}{o}(x^p)\Big)$.

ii. On écrit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B(x)\Big(Q(x) + o_{x\to 0}(x^p)\Big)}{B(x)\Big(1 + o_{x\to 0}(x^p)\Big)} = \frac{Q(x) + o_{x\to 0}(x^p)}{1 + o_{x\to 0}(x^p)}.$$

On sait que $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + o_{u\to 0}(u)$, donc

$$\frac{1}{1 + o_{x\to 0}(x^p)} = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x^p).$$

Ainsi,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \Big(Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^p)\Big)\Big(1 + \underset{x\to 0}{o}(x^p)\Big) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^p).$$

En effet, les termes du type $Q(x) \times o_{x\to 0}(x^p)$ sont des $o_{x\to 0}(x^p)$.

(c) *Un exemple.* On connaît les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 de cos et exp :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

Notons $A = 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24}$ et $B = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24}$, et effectons la division de A par B selon les puissances croissantes, à l'ordre 4 :

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc|l}
 & 1 & & & - & \frac{X^2}{2} & & & + & \frac{X^4}{24} & & & & & 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24} \\
\ominus & 1 & + & X & + & \frac{X^2}{2} & + & \frac{X^3}{6} & + & \frac{X^4}{24} & & & & & \hline 1 - X + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{6} \\
\hline
 & & - & X & - & X^2 & - & \frac{X^3}{6} & & & & & & & \\
\ominus & & - & X & - & X^2 & - & \frac{X^3}{2} & - & \frac{X^4}{6} & - & \frac{X^5}{24} & & & \\
\hline
 & & & & & & & \frac{X^3}{3} & + & \frac{X^4}{6} & + & \frac{X^5}{24} & & & \\
\ominus & & & & & & & \frac{X^3}{3} & + & \frac{X^4}{3} & + & \frac{X^5}{6} & + \frac{X^6}{18} & + \frac{X^7}{72} & \\
\hline
 & & & & & & & & - & \frac{X^4}{6} & - & \frac{X^5}{8} & - \frac{X^6}{18} & - \frac{X^7}{72} & \\
\ominus & & & & & & & & - & \frac{X^4}{6} & & \dots & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & R(X) & \operatorname{val} R \geq & 5 &
\end{array}$$

Ainsi, $A(X) = B(X)\left(1 - X + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{6}\right) + X^5 R(X)$ et en utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit que

$$\frac{\cos x}{e^x} = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4).$$

Partie III - Développements limités des fonctions réciproques

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de valuation égale à 1. On écrit $P(X) = a_1 X + \ldots + a_d X^d$, avec $a_1, \ldots, a_d$ des réels, $a_1 \neq 0$.

(a) On peut écrire $P(X) = a_1 X + X^2 P_1(X)$, $P_1 \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$(a_1X)^n - \left(P(X)\right)^n = (a_1X)^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_1X)^k X^{2n-2k} (P_1(X))^{n-k} = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_1^k X^{2n-k} (P_1(X))^{n-k}.$$

Or, pour tout $k = 0, \ldots, n-1$, $\operatorname{val} X^{2n-k}(P_1(X))^{n-k} \geq \operatorname{val} X^{2n-k} = 2n - k \geq n+1$, donc $\operatorname{val}\left((a_1X)^n - \left(P(X)\right)^n\right) \geq n+1$.

(b) Posons $Q_1(X) = \frac{1}{a_1} X$. Alors, $\deg Q_1 = 1$ et $Q_1(P(X)) = X + \frac{a_2}{a_1} X^2 + \ldots + \frac{a_d}{a_1} X^d$. En définissant $R_1 = -\frac{a_2}{a_1} X^2 - \ldots - \frac{a_d}{a_1} X^d$, on a bien

$$X = Q_1(P(X)) + R_1(X), \quad \deg Q_1 \leq 1 < \operatorname{val} R_1.$$

(c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des polynômes Q_n et R_n de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$X = Q_n(P(X)) + R_n(X), \quad \deg Q_n \leq n < \operatorname{val} R_n. \tag{2}$$

On vient de voir que cette propriété est vérifiée pour $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe des polynômes Q_n et R_n de $\mathbb{R}[X]$ tels que $X = Q_n(P(X)) + R_n(X)$, $\deg Q_n \leq n < \operatorname{val} R_n$. On écrit $R_n(X) = \rho_{n+1} X^{n+1} + \tilde{R}_n(X)$, avec $\operatorname{val} \tilde{R}_n > n+1$. Par la question 1, le polynôme $S_n(X) = (a_1X)^{n+1} - (P(X))^{n+1}$ est de valuation $\operatorname{val} S_n \geq n+2$, et on a

$$\begin{aligned}
X &= Q_n(P(X)) + \rho_{n+1} X^{n+1} + \tilde{R}_n(X) \\
&= Q_n(P(X)) + \frac{\rho_{n+1}}{(a_1)^{n+1}} (a_1X)^{n+1} + \tilde{R}_n(X) \\
&= Q_n(P(X)) + \frac{\rho_{n+1}}{(a_1)^{n+1}} (P(X))^{n+1} + \left(\frac{\rho_{n+1}}{(a_1)^{n+1}} S_n(X) + \tilde{R}_n(X)\right)
\end{aligned}$$

En notant $Q_{n+1}(X) = Q_n(X) + \frac{\rho_{n+1}}{(a_1)^{n+1}} X^{n+1}$ et $R_{n+1}(X) = \frac{\rho_{n+1}}{(a_1)^{n+1}} S_n(X) + \tilde{R}_n(X)$, on a bien

$$X = Q_{n+1}(P(X)) + R_{n+1}(X), \quad \deg Q_{n+1} \leq n+1 < \operatorname{val} R_{n+1}.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la forme : $f(x) = a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$, avec $a_1 \neq 0$.

Pour que le résultat annoncé soit vrai, on a besoin de la continuité de f^{-1} en $f(0) = 0$, qui n'est pas assurée par les hypothèses ci-dessus, qui étaient dans l'énoncé. Il faut ajouter l'hypothèse que f est continue sur un intervalle (non vide) contenant 0*, ce qui implique alors la continuité de f^{-1} sur un intervalle contenant* $f(0)$*. On suppose donc dans la suite que f est continue au voisinage de* 0*.*

(a) La fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 de la forme

$$f(x) = a_1 x + \underset{x \to 0}{o}(x) \ .$$

Elle est donc continue et dérivable en 0 avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = a_1$.

(b) Par définition de f^{-1}, $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$. Comme $f(0) = 0$, on a $f^{-1}(0) = 0$.

(c) Comme f est continue au voisinage de 0, f^{-1} est continue au voisinage de $f(0) = 0$, et $f^{-1}(y) \to f^{-1}(0) = 0$ quand $y \to 0$. Ainsi, avec $x = f^{-1}(y)$,

$$y = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = a_1 x + \underset{x \to 0}{o}(x) = a_1 f^{-1}(y) + \underset{y \to 0}{o}\left(f^{-1}(y)\right).$$

On en déduit $f^{-1}(y) \underset{y \to 0}{\sim} \dfrac{y}{a_1}$.

(d) On note $P(X) = a_1 X + \ldots + a_n X^n$. Par la question 1), il existe deux polynômes $Q_n, R_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X = Q_n(P(X)) + R_n(X)$, avec $\deg Q_n \leq n < \operatorname{val} R_n$. On peut écrire $R_n(X) = X^{n+1}\tilde{R}_n(X)$, $\tilde{R}_n \in \mathbb{R}[X]$, donc $R_n(x) = o_{x\to 0}(x^n)$ et

$$x = Q_n(P(x)) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \quad \deg Q_n \leq n.$$

(e) On a

$$Q_n(f(x)) = Q_n\Big(P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\Big).$$

Or, à l'aide de la formule du binôme, on peut écrire $Q_n(a+b) = Q_n(a) + b\,\tilde{Q}_n(a,b)$, où $\tilde{Q}_n(a,b)$ est un polynôme en a et b, donc

$$Q_n(f(x)) = Q_n(P(x)) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \times \tilde{Q}_n\left(x, \underset{x\to 0}{o}(x^n)\right) = Q_n(P(x)) + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

(f) Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) = x &= Q_n(P(x)) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad \text{par d)} \\ &= Q_n(f(x)) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad \text{par e)} \\ &= Q_n(y) + \underset{y\to 0}{o}(y^n) \quad \text{car } x = f^{-1}(y) \underset{y\to 0}{\sim} \frac{y}{a_1} \end{aligned}$$

On vient d'écrire un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de f^{-1}.

Pour conclure, donnons une idée pour construire un exemple de fonction f satisfaisant les conditions de III.2 mais pas la conclusion - il suffit pour cela (par exemple) de construire une bijection $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0, de dérivée 1, mais telle que f^{-1} ne soit pas continue en 0.
A cet effet, commençons par définir par récurrence une fonction auxiliaire $\varphi\colon \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \to \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ en posant $\varphi(2) = 2$, et pour tout k

$$\varphi(k+1) = \begin{cases} \varphi(k) + 1 & \text{si } \varphi(k)+1 \text{ n'est pas un carré d'entier} \\ \varphi(k) + 2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier (par récurrence) que φ est strictement croissante (donc injective), que si $k \geq 2$ alors $\varphi(k)$ n'est jamais un carré d'entier, et que pour tout k on a $k \leq \varphi(k) \leq k + \sqrt{k}$. Par conséquent $\dfrac{\varphi(n)}{n} \to 1$ quand n tend vers $+\infty$ (tout ce dont on a besoin pour faire marcher l'argument est de trouver une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ avec cette propriété et dont l'image ait un complémentaire infini, ainsi qu'un peu de sueur et de larmes pour tout recoller de façon à avoir une bijection de $\mathbb{R}$).

Notons $A = \varphi(\mathbb{N}^* \setminus \{1\})$ (il s'agit de l'ensemble des entiers ≥ 2 qui ne sont pas un carré d'entier). Définissons enfin notre fonction f, par cas :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \mathbb{N}^* \cup \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}^*\} \\ \frac{1}{\varphi(n)} & \text{si } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{(\varphi^{-1}(x))^2} & \text{si } x \in A \\ k & \text{si } \ x = k^2 \text{ pour un entier } k \geq 1 \end{cases}$$

Cette fonction est une bijection ; $f(0) = 0$; et quand x tend vers 0 on a $\dfrac{f(x)}{x} \to 1$ (notons que seuls les deux premiers points de la définition interviennent quand x est proche de 0, ce qui rend cette vérification facile puisque $\dfrac{\varphi(n)}{n} \to 1$). Mais les x de la forme $\dfrac{1}{n^2}$ sont images d'une suite d'entiers qui tend vers $+\infty$ (la suite $(\varphi(n))$) ; en passant à f^{-1}, cela signifie que la suite $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ est telle que $f^{-1}(u_n)$ tend vers $+\infty$, ce qui montre que f^{-1} n'est pas continue en 0.