Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015
Cursus préparatoire/CCP, $1^{\text{ère}}$ année

Problème du 11 mars, durée 1h30

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
Les problèmes ci-dessous sont indépendants.

Problème 1. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) f'' est décroissante sur $]0,+\infty[$,

(ii) $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$,

(iii) $f(1) = 0$.

1. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_k \in \left]k, k+\frac{1}{2}\right[$ et $z_k \in \left]k+\frac{1}{2}, k+1\right[$ tels que
$$\begin{aligned} f\left(k+\frac{1}{2}\right) - f(k) &= \frac{1}{2}f'(k) + \frac{1}{8}f''(y_k) \\ -f\left(k+\frac{1}{2}\right) + f(k+1) &= \frac{1}{2}f'(k+1) - \frac{1}{8}f''(z_k). \end{aligned}$$
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{2}\left(f'(k) + f'(k+1)\right) = f(k+1) - f(k) + \frac{1}{8}\left(f''(z_k) - f''(y_k)\right).$$
2. On définit pour tout entier $n \geq 2$,
$$U_n(f) = \frac{1}{2}f'(1) + \sum_{k=2}^{n-1} f'(k) + \frac{1}{2}f'(n) - f(n).$$
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $U_n(f) = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1}\left(f''(z_k) - f''(y_k)\right)$.
   (b) En déduire que la suite $(U_n(f))_{n\geq 2}$ est décroissante.
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $U_n(f) \geq -\frac{1}{8}f''(y_1)$.
   (d) Montrer que la suite $(U_n(f))_{n\geq 2}$ converge. On notera $U(f)$ sa limite.
   (e) On définit pour tout entier $n \geq 2$, $V_n(f) = U_n(f) - \frac{1}{8}f''(n)$. Montrer que la suite $(V_n(f))_{n\geq 2}$ est croissante et qu'elle converge vers $U(f)$.
   (f) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \geq 2$,
$$0 \leq U_n(f) - U(f) \leq \frac{1}{8}f''(n).$$
3. *Application.* On considère la fonction $f_1 :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x > 0, f_1(x) = -\ln x.$$
   On définit aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que $(U_n(f_1))_n$ converge.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $U_n(f_1) = \ln n - H_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.
En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} (H_n - \ln n) = \gamma.$$

(c) En utilisant le résultat de la question 2f), montrer que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Problème 2. Dans ce problème, on cherche à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P\big((\cos(t)\big) + P\big(\sin(t)\big) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Soit P un tel polynôme.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(-\sin x) = P(\sin x)$ et en déduire que pour tout $y \in [-1, 1]$ on a $P(y) = P(-y)$.
   (b) Montrer que $P(X) = P(-X)$.
   (c) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2)$.
2. En vous inspirant de la technique employée à la question précédente, montrer que pour tout $y \in [0, 1]$ on a $Q(y) + Q(1 - y) = 1$.
3. En déduire que $Q(X) + Q(1 - X) = 1$.
4. On introduit $R(X) = Q\left(X + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$.
   (a) Montrer que $R(-X) = -R(X)$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R(X) = XS(X^2)$.
5. Montrer que l'on a

$$P(X) = \left(X^2 - \frac{1}{2}\right) S\left((X^2 - \frac{1}{2})^2\right) + \frac{1}{2} \tag{1}$$

On peut également montrer la réciproque. En commençant par remarquer que pour tout entier n, tout réel t, on a

$$\left(\cos^2(t) - \frac{1}{2}\right)\left[\left(\cos^2(t) - \frac{1}{2}\right)^2\right]^n = -\left(\sin^2(t) - \frac{1}{2}\right)\left[\left(\sin^2(t) - \frac{1}{2}\right)^2\right]^n$$

on peut ensuite en déduire que s'il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que (1) est vérifiée, alors
$P(\cos(t)) + P(\sin(t)) = 1$ *pour tout $t \in \mathbb{R}$.*