Problème du 11 mars, corrigé

Problème 1. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) f'' est décroissante sur $]0,+\infty[$,

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$,

(iii) $f(1) = 0$.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ donc sur $[k, k+\frac{1}{2}]$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f entre k et $k+\frac{1}{2}$: il existe $y_k \in \left]k, k+\frac{1}{2}\right[$ tel que

$$\begin{aligned} f\left(k+\frac{1}{2}\right) - f(k) &= f'(k)\left(k+\frac{1}{2}-k\right) + \frac{f''(y_k)}{2}\left(k+\frac{1}{2}-k\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}f'(k) + \frac{1}{8}f''(y_k). \end{aligned}$$

De même, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[k+\frac{1}{2}, k+1]$, donc il existe $z_k \in \left]k+\frac{1}{2}, k+1\right[$ tel que

$$\begin{aligned} f\left(k+\frac{1}{2}\right) &= f(k+1) + f'(k+1)\left(k+\frac{1}{2}-(k+1)\right) + \frac{f''(z_k)}{2}\left(k+\frac{1}{2}-(k+1)\right)^2 \\ &= f(k+1) - \frac{1}{2}f'(k+1) + \frac{1}{8}f''(z_k), \end{aligned}$$

c'est à dire

$$-f\left(k+\frac{1}{2}\right) + f(k+1) = \frac{1}{2}f'(k+1) - \frac{1}{8}f''(z_k).$$

(b) En sommant les deux égalités obtenues à la question précédente, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2}\left(f'(k) + f'(k+1)\right) = f(k+1) - f(k) + \frac{1}{8}\left(f''(z_k) - f''(y_k)\right).$$

2. On définit pour tout entier $n \geq 2$,

$$U_n(f) = \frac{1}{2}f'(1) + \sum_{k=2}^{n-1} f'(k) + \frac{1}{2}f'(n) - f(n).$$

(a) Soit $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} U_n(f) &= \left(\frac{1}{2}f'(1) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1} f'(k)\right) + \left(\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1} f'(k) + \frac{1}{2}f'(n)\right) - f(n) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f'(k) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} f'(k) - f(n) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(f'(k) + f'(k+1)\Big) - f(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\Big(f(k+1) - f(k)\Big) - f(n) + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(f''(z_k) - f''(y_k)\Big) \quad \text{par 1f).} \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\Big(f(k+1) - f(k)\Big) - f(n) = f(1) - f(2) + f(2) - \ldots + f(n) - f(n) = f(1) = 0$$

donc $U_n(f) = \dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(f''(z_k) - f''(y_k)\right)$.

(b) Soit $n \geq 2$. On a $U_{n+1}(f) = U_n(f) + \frac{1}{8}\left(f''(z_n) - f''(y_n)\right)$. Or $y_n < n + \frac{1}{2} < z_n$ et f'' est décroissante donc $f''(z_n) \leq f''(y_n)$, et $U_{n+1}(f) \leq U_n(f)$. La suite $(U_n(f))_{n\geq 2}$ est donc décroissante.

(c) Soit $n \geq 2$. On écrit

$$\begin{aligned}
U_n(f) &= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1} f''(z_k) - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-1} f''(y_k) \\
&= \frac{1}{8}f''(z_{n-1}) + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-2} f''(z_k) - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-2} f''(y_{k+1}) - \frac{1}{8}f''(y_1) \\
&= \frac{1}{8}f''(z_{n-1}) + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n-2} \left(f''(z_k) - f''(y_{k+1})\right) - \frac{1}{8}f''(y_1).
\end{aligned}$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $z_k < k+1 < y_{k+1}$ et f'' est décroissante donc $f''(z_k) \geq f''(y_{k+1})$.
De plus, $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$ et f'' est décroissante sur $]0,+\infty[$ donc $f''(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi, $f''(z_{n-1}) \geq 0$, et on obtient $U_n(f) \geq -\dfrac{1}{8}f''(y_1)$.

(d) On vient de montrer que $(U_n(f))_{n\geq 2}$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite finie notée $U(f)$.

(e) On définit pour tout entier $n \geq 2$, $V_n(f) = U_n(f) - \dfrac{1}{8}f''(n)$. Soit $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned}
V_{n+1}(f) - V_n(f) &= U_{n+1}(f) - U_n(f) - \frac{1}{8}f''(n+1) + \frac{1}{8}f''(n) \\
&= \frac{1}{8}\left(\Big(f''(z_n) - f''(n+1)\Big) + \Big(f''(n) - f''(y_n)\Big)\right).
\end{aligned}$$

En utilisant encore la décroissance de f'' et les inégalités $n < y_n$, $z_n < n+1$, on obtient $V_{n+1}(f) \geq V_n(f)$. Ainsi la suite $(V_n(f))_{n\geq 2}$ est croissante.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(f) = U(f)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f''(n) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n(f) = U(f)$.

(f) D'une part, $(U_n(f))_{n\geq 2}$ converge en décroissant vers $U(f)$ donc pour tout $n \geq 2$, $U_n(f) \geq U(f)$.
D'autre part, $(V_n(f))_{n\geq 2}$ converge en croissant vers $U(f)$ donc pour tout $n \geq 2$, $V_n(f) \leq U(f)$, c'est-à-dire $U_n(f) - \frac{1}{8}f''(n) \leq U(f)$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq U_n(f) - U(f) \leq \frac{1}{8}f''(n).$$

3. *Application.* On considère la fonction $f_1 :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 0, f_1(x) = -\ln x.$$

On définit aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Pour montrer que $(U_n(f_1))_n$ converge, il suffit de vérifier que f_1 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et satisfait les propriétés (i)-(ii)-(iii). ln est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f_1'(x) = -\frac{1}{x}, \quad f_1''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi, f_1'' est décroissante sur $]0,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1''(x) = 0$ et $f_1(1) = 0$.

(b) Soit $n \geq 2$. On a

$$U_n(f_1) = -\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2n} + \ln n = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \ln n = \ln n - H_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Comme $(U_n(f_1))_n$ converge vers $U(f_1)$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, on obtient que $\lim_{x\to+\infty} (H_n - \ln n) = \dfrac{1}{2} - U(f_1)$. En posant $\gamma = \frac{1}{2} - U(f_1)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} (H_n - \ln n) = \gamma.$$

(c) Par la question 2f) appliquée à f_1, on a pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq U_n(f_1) - U(f_1) \leq \frac{1}{8n^2},$$

c'est-à-dire

$$0 \leq \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - H_n \leq \frac{1}{8n^2}$$

et donc

$$0 \leq n\left(\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - H_n\right) \leq \frac{1}{8n}$$

ce qui montre que $\lim_{x\to+\infty} n\left(\ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} - H_n\right) = 0$ et donc

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Problème 2. Dans ce problème, on cherche à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P((\cos(t)) + P(\sin(t)) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Soit P un tel polynôme.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $-\sin x = \sin(-x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$ donc

$$P(-\sin x) = P(\sin(-x)) = 1 - P(\cos(-x)) = 1 - P(\cos x) = P(\sin x).$$

Pour tout $y \in [-1,1]$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sin x$ (on peut même choisir $x = \operatorname{Arcsin} y \in [-\pi/2, \pi/2]$), donc

$$P(-y) = P(-\sin x) = P(\sin x) = P(y).$$

(b) Notons $A \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $A(X) = P(X) - P(-X)$. Alors $A(y) = 0$ pour tout $y \in [-1,1]$, donc le polynôme A admet une infinité de racines réelles, d'où $A = 0$, *i.e.* $P(X) = P(-X)$.

(c) Notons $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d$, où $a_0, \ldots, a_d$ sont des réels et $a_d \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} P(X) = P(-X) &\iff \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k a_k X^k \\ &\iff a_k = (-1)^k a_k \quad \text{pour tout } k = 0, \ldots d \end{aligned}$$

(par unicité de la décomposition de P selon les puissances de X). Ainsi,

$$P(X) = P(-X) \iff a_k = 0 \ \text{ pour tout } k \text{ impair}, 0 \leq k \leq d.$$

En particulier, on en déduit que d est pair, $d = 2d_1$ et que

$$P(X) = \sum_{l=0}^{d_1} a_{2l} X^{2l} = Q(X^2) \quad \text{où } Q(X) = \sum_{l=0}^{d_1} a_{2l} X^l.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$Q((\sin x)^2) + Q(1 - (\sin x)^2) = Q((\sin x)^2) + Q((\cos x)^2) = P(\sin x) + P(\cos x) = 1.$$

Or pour tout $y \in [0,1]$, il existe $\tilde{y} \in [0,1]$ tel que $y = (\tilde{y})^2$ ($\tilde{y} = \sqrt{y}$ convient) et il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{y} = \sin x$ et donc $y = (\sin x)^2$.
On obtient donc comme à la question précédente, que pour tout $y \in [0,1]$, $Q(y) + Q(1-y) = 1$.

3. De même qu'au 1b), on en déduit que $Q(X)+Q(1-X)=1$.
4. On introduit $R(X) = Q\left(X+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}$.
   (a) On a
   $$R(-X) = Q\left(-X+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2} = 1-Q\left(1-\left(-X+\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-Q\left(X+\frac{1}{2}\right) = -R(X)$$
   (b) Notons $R(X) = b_0+b_1X+\ldots+b_{d_1}X^{d_1}$, où $b_0,\ldots,b_{d_1}$ sont des réels et $b_{d_1}\neq 0$. En raisonnant comme à la question 1b), on obtient que
   $$R(-X) = -R(X) \Longleftrightarrow b_k = 0 \ \text{ pour tout } k \text{ pair, } \ 0\leq k\leq d_1.$$
   En particulier, on en déduit que d_1 est impair, $d_1 = 2d_2+1$ et que
   $$R(X) = \sum_{l=0}^{d_2} b_{2l+1}X^{2l+1} = XS(X^2) \quad \text{où } S(X) = \sum_{l=0}^{d_2} b_{2l+1}X^l.$$
5. En résumant, $Q(X) = R(X-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$ et
   $$P(X) = Q(X^2) = R\left(X^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} = \left(X^2-\frac{1}{2}\right)S\left((X^2-\frac{1}{2})^2\right)+\frac{1}{2}.$$

On peut également montrer la réciproque. On commence par remarquer que pour tout entier n, tout $t\in\mathbb{R}$, on a $\cos^2(t)-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-\sin^2(t)$ donc

$$\begin{aligned}\left(\cos^2(t)-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\cos^2(t)-\frac{1}{2}\right)^2\right]^n &= \left(\frac{1}{2}-\sin^2(t)\right)\left[\left(\frac{1}{2}-\sin^2(t)\right)^2\right]^n \\ &= -\left(\sin^2(t)-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\sin^2(t)-\frac{1}{2}\right)^2\right]^n\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe $S\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = \left(X^2-\frac{1}{2}\right)S\left((X^2-\frac{1}{2})^2\right)+\frac{1}{2}$. Notons $S=\sum_{n=0}^{N}\alpha_nX^n$. Alors pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&P(\cos(t))+P(\sin(t)) \\ &= \left(\cos^2(t)-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\left[\left(\cos^2(t)-\frac{1}{2}\right)^2\right]^n+\frac{1}{2}+\left(\sin^2(t)-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\left[\left(\sin^2(t)-\frac{1}{2}\right)^2\right]^n+\frac{1}{2} \\ &= \sum_{n=0}^{N}\alpha_n\left(\left(\cos^2(t)-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\cos^2(t)-\frac{1}{2}\right)^2\right]^n+\left(\sin^2(t)-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\sin^2(t)-\frac{1}{2}\right)^2\right]^n\right)+1 \\ &= 1.\end{aligned}$$