Problème du 11 février 2015 - Correction.

Problème 1. 1. (a) Puisque $\mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et qu'on peut sommer des développements limités, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(t) &= \frac{1}{2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} - 1 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right) + \underset{t\to 0}{o}(t^3) \\ &= t + \frac{t^3}{6} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)\end{aligned}$$

(b) Le développement ci-dessus nous donne immédiatement que $\mathrm{sh}\, t$ est équivalent à t en 0.

(c) Quand $x \to 0^+$ $e^{-\frac{1}{x}}$ tend vers 0 alors que $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers $+\infty$; par conséquent $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ est équivalent à $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}$ quand $x \to 0^+$.

2. Pour $x \neq 0$ on a $f(-x) = -x\,\mathrm{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$; donc f est paire.

3. (a) Pour étudier f en $+\infty$, posons $u = \frac{1}{x}$; on est ramené à étudier $\frac{\mathrm{sh}\, u}{u}$ quand $u \to 0^+$. Comme on a vu que $\mathrm{sh}\, u \sim u$ en 0, on peut conclure que $\frac{\mathrm{sh}\, u}{u}$ tend vers 1 quand u tend vers 0^+, autrement dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Puisque f est paire, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

(b) Puisqu'on peut multiplier des équivalents, on conclut du résultat de (1c) que $f(x) \sim \frac{x}{2}e^{\frac{1}{x}}$ quand $x \to 0^+$; par croissances comparées, on obtient que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x \to 0^+$. Comme f est paire, on a aussi $f(x) \to +\infty$ quand $x \to 0^-$, et on en déduit finalement que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

4. $x \mapsto \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions dérivables, et f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions dérivables. En appliquant les formules de dérivation des produits et composées, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) .\end{aligned}$$

5. Soit $t \in]0, +\infty[$. Comme la fonction th est continue sur $[0, t]$ et dérivable sur $]0, t[$ on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis, et on obtient qu'il existe $c \in]0, t[$ tel que

$$\mathrm{th}(t) = \mathrm{th}(t) - \mathrm{th}(0) = \mathrm{th}'(c)(t - 0) = t\,\mathrm{th}'(c) .$$

Puisque $\mathrm{th}'(c) = 1 - \mathrm{th}^2(c)$, on obtient que $0 < \mathrm{th}'(c) < 1$, et on en conclut en particulier que $\mathrm{th}(t) < t$.

6. Comme ch est à valeurs dans $[1, +\infty[$, la formule obtenue pour f' nous permet de conclure que $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$; par conséquent, f' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Puisque f est paire, f est strictement croissante sur $] - \infty, 0[$ et on obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1

7. On a vu que $\operatorname{sh}(t) = t + \frac{t^3}{6} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)$, ce dont on déduit que
$$\frac{\operatorname{sh}(t)}{t} = 1 + \frac{t^2}{6} + \underset{t\to 0}{o}(t^2) \ .$$

8. En appliquant la formule précédente (avec $t = \frac{1}{x}$) on obtient qu'au voisinage de $\pm\infty$ on a
$$f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \underset{t\to \pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \ .$$

9. En tant que composée de fonctions continues, g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et on doit étudier si elle a une limite en 0. Quand $x \to 0^-$, $\frac{1}{x} \to -\infty$, et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 1 ; de même quand $x \to 0^+$ (en utilisant la parité de f) et on obtient donc que $g(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0. On peut donc prolonger g par continuité en posant $g(0) = 1$.
Pour voir si g est dérivable en 0, on considère le taux d'accroissement en 0 ; pour x différent de 0 on a
$$\begin{aligned}\frac{g(x)-g(0)}{x} &= \frac{g(x)-1}{x} \\ &= \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x} \\ &= \frac{1+\frac{x^2}{6}+o_{x\to 0}(x^2)-1}{x} \\ &= \frac{x}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x) \ .\end{aligned}$$
(l'égalité de l'avant-dernière ligne vient du développement obtenu à la question 8). On voit donc que le taux d'accroissement de g en 0 tend vers 0 ; par conséquent $g'(0)$ existe et vaut 0.
Remarque : on pouvait aussi utiliser le théorème du cours qui dit que si g admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, alors g est dérivable en 0. Ici,
$$g(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = 1 + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
donc g est dérivable en 0 et on a $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$.

10. On a vu (cf. tableau de variations) que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc en particulier injective) et que $f(\mathbb{R}_+^*) =]1, +\infty[$. Puisque $\frac{n+1}{n} > 1$, on obtient qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x) = \frac{n+1}{n}$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$f(u_{n+1}) = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} = f(u_n) \ .$$
Comme f est strictement décroissante, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$; on vient de montrer que (u_n) est strictement croissante.

12. *Méthode 1.* On sait que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et converge vers 1 quand x tend vers $+\infty$. Fixons $M > 0$; on doit montrer que pour n suffisamment grand, on a $u_n \geq M$. Or, $f(M) > 1$ et $f(u_n)$ tend vers 1 par définition de (u_n). Par conséquent, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(u_n) \leq f(M)$ pour tout $n \geq N$; comme f est décroissante, cela impose que $u_n \geq M$ pour tout $n \geq N$, et on vient de montrer que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

    Méthode 2. La suite (u_n) étant croissante, ou bien elle converge vers une limite finie ℓ quand $n \to +\infty$, ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Supposons par l'asburde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Alors $\ell \in]u_0, +\infty[$ donc f est continue au point ℓ. Ainsi à la limite $n \to +\infty$ dans l'égalité $f(u_n) = 1 + \dfrac{1}{n}$, on obtient $f(\ell) = 1$. Or 1 n'est pas une valeur atteinte par f. Contradiction. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

13. Comme (u_n) tend vers $+\infty$, le résultat de la question 8 nous permet d'écrire que

$$f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n^2}\right) .$$

    Comme $f(u_n) = 1 + \dfrac{1}{n}$, ceci se réécrit sous la forme

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{6u_n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n^2}\right) .$$

    Autrement dit, $\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{6u_n^2}$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui revient à dire que $6u_n^2 \sim n$, ou encore que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{n}{6}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Problème 2.

1. On utlise la formule du binôme de Newton pour développer $(X+1)^{2n}$:

$$P(X) = \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k\right) - 1 = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = X \sum_{p=0}^{2n-1} \binom{2n}{p+1} X^p .$$

    On vient d'écrire $P(X) = XQ(X)$, où Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $2n-1$, de coefficient dominant $\binom{2n}{2n} = 1$, et de terme constant $q_0 = \binom{2n}{1} = 2n$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors α est une racine de P si et seulement si $(\alpha+1)^{2n} = 1$, autrement dit si et seulement si $\alpha + 1$ est une racine $2n$-ième de l'unité. Les racines $2n$-ièmes de l'unité sont tous les $e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}$, où $k \in \{0, \ldots 2n-1\}$. Les racines de P sont donc tous les nombres de la forme $e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1$, où $k \in \{0, \ldots, 2n-1\}$.

    Posons $z_k = e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1$ pour $k \in \{0, \ldots, 2n-1\}$. On peut écrire

$$z_k = e^{\frac{ik\pi}{2n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{2n}} - e^{-\frac{ik\pi}{2n}}\right) = 2ie^{\frac{ik\pi}{2n}} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) .$$

    On a bien retrouvé la formule donnée par l'énoncé.

3. En utilisant le fait que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, on obtient

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right)$$

    En posant $p = 2n - k$, on obtient comme prévu que $A_n = \displaystyle\prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$.

4. Le résultat de la question précédente donne immédiatement que $B_n = A_n^2$. De plus, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0$ (puisque sin est à valeurs strictement positives sur $]0, \frac{\pi}{2}[$), donc A_n est strictement positif et on obtient $A_n = \sqrt{B_n}$.
5. Puisque $z_1, \ldots, z_{2n-1}$ sont les racines non nulles de P, on a $P(X) = X(X - z_1)\ldots(X - z_{2n-1})$, et donc $Q(X) = (X - z_1)\ldots(X - z_{2n-1})$ (ici on utilise que P et Q sont unitaires). En développant le produit, on obtient que son terme constant est $(-1)^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.

   On vient d'obtenir que $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -q_0 = -2n$.

   La formule qu'on avait obtenue pour z_k nous donne quant à elle :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= \prod_{k=1}^{2n-1} 2ie^{\frac{ik\pi}{2n}} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\
&= (2i)^{2n-1} e^{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{ik\pi}{2n}} \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \\
&= 2^{2n-1} i^{2n-1} e^{\frac{i\pi(2n-1)}{2}} B_n \\
&= 2^{2n-1} i^{2n-1} i^{2n-1} B_n \\
&= -2^{2n-1} B_n \ .
\end{aligned}$$

   On obtient donc que $-2n = -2^{2n-1}B_n$, autrement dit $B_n = n2^{2-2n}$, et finalement

$$A_n = \sqrt{n}2^{1-n} \ .$$