Université LYON 1	Semestre d'Automne 2013-2014
Maths I Analyse LES SUITES REELLES	

Toutes les suites étudiées ici sont des suites à valeurs réelles.

Exercice 1 : Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 2 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes. On note $l_1 = \lim\ u_n$ et $l_2 = \lim\ v_n$.
Montrer que $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$.
Montrer que $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.

Exercice 3 : Soit (u_n) une suite qui tend vers l et (v_n) une suite qui tend vers +∞ : montrer que $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : Soit (u_n) une suite qui tend vers $l > 0$ et (v_n) une suite qui tend vers +∞ : montrer que $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$ et (v_n) une suite qui tend vers $-\infty$: montrer que $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$.

Exercice 6 : Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$ avec $u_n \neq 0$, pour tout n . Montrer que la suite $(\frac{1}{u_n})$ tend vers 0

Exercice 7 : Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite qui tend vers 0 : montrer que $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Exercice 8 : Montrer que si (u_n) tend vers l alors la suite ($|u_n|$) converge vers $|\ l\ |$. Etablir la réciproque pour $l = 0$.

Exercice 9 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes . Etudier la suite (max (u_n, v_n)).

Exercice 10 : Soit $a \in \mathbb{R}$; Etudier la suite (a^n) lorsque $a > 1$.En déduire la nature de cette suite pour tout $\in \mathbb{R}$.

Exercice 11 : Soit $a \in \mathbb{R}$; rappeler la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{k=n} a^k$.

1-Application : Etudier les suites de terme général

$u_n = 0{,}1111111....1$ (n décimales) $\quad u_n = 0{,}3333333...3 \quad u_n = 0{,}9999999...9$

2-Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la suite de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{k=n} a^k$ est-elle convergente ?

Exercice 12 : Etude de la convergence de la suite de terme général $u_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$ puis $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$

$\boxed{\text{Théorème}}$

* Toute suite de réels croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.

* Toute suite de réels décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.

<u>Exercice 13</u> : Soit $u_0 \in [0,\frac{1}{5}]$ et par récurrence $u_{n+1} = {u_n}^2 + \frac{4}{25}$, n ∈ ℕ .

a- Montrer que tous les u_n sont compris entre 0 et $\frac{1}{5}$.
b- Montrer que la suite (u_n) est monotone, bornée, convergente et trouver sa limite.
c- Reprendre l'étude pour $u_0 \in]\frac{1}{5},\frac{4}{5}[$, $u_0 = \frac{4}{5}$, $u_0 > \frac{4}{5}$, $u_0 < 0$.

<u>Exercice 14</u> : Soit $a \in \mathbb{R}$; Soit $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Montrer que la suite $(|u_n|)$ est décroissante à partir d'un

certain entier n_0 et en conclure que la suite (u_n) converge vers 0, quelque soit a .

<u>Exercice 15</u> : Soit $a \in R^+$. Soit $u_0 = 0$ et par recurrence $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$ .Montrer que cette suite est définie. Montrer qu'elle est croissante, majorée par 1+ a et trouver sa limite.

<u>Exercice 16</u> : On pose $u_0 = 1$ et par recurrence $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$, n ∈ ℕ .Montrer que cette suite est définie, qu'elle est monotone et trouver sa limite.

<u>Exercice 17</u> : Montrer qu'une suite (u_n) converge vers l si et seulement si les sous suites (u_{2n+1}) et (u_{2n}) convergent vers l.

<u>Exercice 18</u> : Soit une suite (u_n) ; on suppose que (u_{2n}) converge vers l_1, (u_{2n+1}) converge vers l_2,

(u_{3n}) converge vers l_3.Montrer que $l_1 = l_2 = l_3$ et que (u_n) converge vers cette valeur commune.

<u>Exercice 19</u> : On pose $u_0 = 1$ et par recurrence $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$. Calculer u_1, u_2, u_3.

Montrer que $u_n > 1$ pour tout n ∈ ℕ*.

Montrer que la fonction f(x) = $1+\frac{2}{x}$ est décroissante sur [1,+∞[.Etudier les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}):on montrera qu'elles sont monotones et que $\forall\, n,\ u_{2n} < 2$, $u_{2n+1} > 2$. Conclure.

<u>Exercice 20</u> : On pose : $u_0 = 0$ et par recurrence $u_{n+1} = \cos u_n$.

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Etudier les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) puis conclure.

Exercice 21 : On pose : $u_0 = \frac{1}{2}$ et par recurrence u_{n+1}= (1- $u_n)^2$, n $\in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in[0,1]$.

Montrer que la fonction f(x) = (1-x)^2 est décroissante sur [0,1]. Etudier les sous suites (u_{2n}) et(u_{2n+1}) puis conclure.

Suites adjacentes

Exercice 22 : On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$; Montrer que ces 2 suites sont adjacentes et convergent vers une limite commune qui est un nombre irrationnel.

Exercice 23 : moyenne arithmético-géométrique : soient $a_0 > 0, b_0 > 0$ donnés et par récurrence

a_n=$\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$, b_n=$\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ pour n≥ 1.Montrer que $\forall n \geq 1, a_n \leq b_n$ et que ces 2 suites sont adjacentes.

Exercice 24 : On donne 4 réels : a>b>0 et v_0>u_0 ; on pose par récurrence $\forall n \geq 1$:

u_n= $\frac{au_{n-1}+bv_{n-1}}{a+b}$, v_n= $\frac{bu_{n-1}+av_{n-1}}{a+b}$; Montrer que ces suites sont adjacentes et trouver leur limite commune à l'aide de u_n+v_n.

Exercice 25 : On donne α >0, β>0 , u_0=2, v_0=1 et on pose par récurrence $\forall n \geq 1$:

u_n= $\frac{\alpha u_{n-1}+\beta v_{n-1}}{\alpha+\beta}$, v_n= $\frac{\alpha u_n+\beta v_{n-1}}{\alpha+\beta}$

a-Montrer $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \leq \frac{1}{4}$

b-pour $n \geq 1$ exprimer $u_n - v_n$ en fonction de $u_{n-1} - v_{n-1}$; en déduire que $u_n - v_n$= $(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2})^n$.

c-pour $n \geq 1$ montrer que $v_n - v_{n-1}$= $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2})^n$.

d-montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

e-En déduire lim u_n = lim v_n = 1+ $\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ (en exprimant v_n à l'aide de la question c).

Exercice 26 : Suites recurrentes linéaire d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, u_0 et u_1 donnés.

a- Déterminer la suite (u_n) telle que : $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$, u_0=-1, $u_1 = 1$ et sa limite éventuelle.
b- De même pour $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$, u_0=2, $u_1 = 2(1 + \sqrt{3})$.
c- De même pour $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$, u_0=1, u_1 =2.

Exercice 27 : Suite de Fibonacci

On pose u_0=1, u_1=2 et par récurrence u_n=$u_{n-1} + u_{n-2}$ pour tout n≥2.

a – Exprimer u_n en fonction de n (suite récurrente linéaire d'ordre 2) et en déduire que (u_n) tend vers +∞.

b – Montrer $\forall n \in N \ \ {u_{n+1}}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$.

c – On pose v_n= $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: déterminer $\lim_{n\to\infty} {v_n}^2 - v_n - 1$.

d – Calculer $v_{p+1} - v_p$ puis $v_{p+1} - v_{p-1}$. En déduire l'étude des sous suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}).

e –Montrer que l'on peut en conclure $\lim v_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 28 : Suite de Césaro

Soit (u_n) une suite qui converge vers l ; montrer que la suite (v_n) définie par

$v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge également vers l.