Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de Mathématiques : hors catégorie
Année 2014–2015

Sommes infinies problématiques

Il y a déjà plusieurs mois que l'égalité suivante « fait du buzz » sur le net :

$$1+2+3+4+5+\cdots = -\frac{1}{12}.$$

On a pu lire ce billet de Science étonnante dès mai 2013, suivi de cet autre le 20 janvier 2014. Quelques jours avant, le 9 janvier, le site américain Mathophile a posté cette vidéo qui explique la même chose. Le plus étonnant, c'est sans doute la reprise de cette vidéo par le New York Times en février 2014 ! Cela explique sans doute que cette somme a fleuri un peu partout ensuite. Les forums français ne sont pas de reste : voir par exemple cette vidéo de Micmaths du 21 novembre 2014 et ce fil un peu plus ancien et un peu plus mathématisé sur Les-mathématiques.net.

1° Un exemple simple

Commençons avec le classique

$$0,999999\cdots = 1.$$

Approche informelle

Admettons provisoirement que l'écriture $0,99999\cdots$ désigne un nombre, disons un rationnel ou un réel. Cela ne va pas de soi : il est facile d'ajouter un nombre arbitrairement grand mais *fini* de chiffres 9 : on n'a pas de peine à imaginer une formule qui étend $0,999 = 999/1000$ à un nombre fini arbitraire de chiffres ; mais de là à pousser à l'infini, il y a un pas qu'un esprit rationnel et prudent répugne à franchir sans précautions. En tout état de cause, il est facile de se convaincre que c'est nécessairement 1. Voici deux[1] arguments.

1. Si l'on « croit » à des règles raisonnables sur les sommes infinies, on peut écrire :

   $$10\times 0,99999\cdots = 9,99999\cdots = 9+0,999999\cdots,$$

   ce qui revient à dire, en notant $x = 0,99999\cdots$:

   $$10x = 9 + x,$$

   équation qu'il est facile de résoudre pour trouver : $x = 1$.
2. Spontanément, on voit bien que pour trouver Charlie en choisissant au hasard dans une population de $1000\cdots00$ individus, disons 10^n individus, on a de moins en moins de chances de réussite lorsque le nombre de zéros, n, augmente : autrement dit, la probabilité de se tromper devient très proche de 1 (infiniment ?).
3. Chacun des nombres $0,9999\cdots99$ formés avec un nombre arbitrairement grand *mais fini* de chiffres 9 est inférieur à 1. Pour se convaincre que le « nombre » x écrit avec une infinité de 9 vaut 1, on n'a qu'à essayer d'écrire le développement décimal d'un réel strictement plus petit que 1 et on verra que x est strictement plus grand que lui.

   Pour présenter l'argument de façon plus positive, constatons que la différence entre 1 et le nombre $x_n = 0,99\cdots99$ écrit avec n chiffres 9 est $0,00\cdots01 = 10^{-n}$. Imaginons alors un réel y strictement plus petit que 1. Le nombre $1-y$ possède un développement décimal dont tous les chiffres ne sont pas nuls ; pour n « assez grand », la différence $1-x_n = 10^{-n}$

1. Rappelons qu'il y a trois catégories de gens : ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas.

sera plus petite que $1-y$ puisque le premier chiffre non nul de $1-x_n$ est situé strictement plus à droite que le premier chiffre non nul de $1-y$. Ainsi, y est strictement plus petit que x_n. Autrement dit, notre nombre x, étant au plus égal à 1 et strictement plus grand que tout nombre y strictement plus petit que 1, vaut nécessairement 1.

Approche formalisée
Notons que le nombre x_n introduit ci-dessus est la somme finie

$$x_n = 0,\underbrace{9999\ldots 99}_{n \text{ chiffres}} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^{n-1}} + \frac{9}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}.$$

Il s'agit donc de *donner un sens* à la somme infinie

$$x = 0,9999\cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}.$$

C'est la théorie des suites qui donne la réponse : on cherche la limite $\lim_{n\to+\infty} x_n$. Si elle existe, c'est l'unique réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Pour montrer que $\ell = 1$, il suffit de reconnaître une suite géométrique de premier terme $9/10$ et de raison $1/10$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} - 1 = \frac{9}{10} \times \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} - 1 = 1 - \frac{1}{10^n} - 1 = -\frac{1}{10^n}.$$

On montre facilement par récurrence $10^n \geqslant n$ pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$. Soit n_0 un entier strictement plus grand que ε, par exemple $\lfloor \varepsilon \rfloor + 1$. Alors, pour $n \geqslant n_0$, on a : $\frac{1}{10^n} \leqslant \frac{1}{n_0} \leqslant \varepsilon$. Cela prouve que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Remarque. On vient simplement de formaliser l'argument de 3.

2° **Une somme qui diverge mais pas trop :** $1-1+1-1+\cdots$
L'exemple suivant est la somme infinie :

$$A = 1-1+1-1+1-1+\cdots.$$

Approche informelle
À supposer que cette somme ait un sens et que l'on puisse manipuler les sommes infinies de façon raisonnable, voici deux arguments pour justifier que la seule valeur possible de A est $1/2$.

1. Selon comment on met des parenthèses, on trouve :

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0,$$
$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1\,;$$

   dans le doute, on peut prendre la moyenne des deux valeurs, à savoir 1/2... Un peu arbitraire, pas terriblement convaincant mais bon...

2. Il est raisonnable d'écrire :

$$-A = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots,$$

ce qui donne en ajoutant 1 :

$$1 - A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = A,$$

puis, de la relation $1 - A = A$, on déduit naturellement $\boxed{A = \frac{1}{2}}$.

3. On a appris des choses dans l'exemple précédent : A devrait être la somme $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$, c'est-à-dire la limite en un sens approprié de la suite

$$u_n = \underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \pm 1}_{n+1 \text{ termes}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.$$

Malheureusement, cette suite n'a pas de limite :

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Faute d'une vraie limite, on pourrait choisir la « valeur moyenne », c'est-à-dire $\boxed{A = \frac{0+1}{2}}$.

Formalisation : moyenne au sens de Cesaro

En fait, on peut donner une certaine consistance à ce dernier argument qui semblait bien arbitraire. Étant donné une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$, on peut calculer la moyenne des premiers termes :

$$U_0 = u_0, \quad U_1 = \frac{u_0 + u_1}{2}, \quad U_2 = \frac{u_0 + u_1 + u_2}{3} \ldots$$

c'est-à-dire, pour tout n :

$$U_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

Théorème (Cesaro)**.** *Si la suite (u_n) converge vers le réel ℓ, alors (U_n) converge aussi vers ℓ.*

(C'est un bon exercice de le démontrer.) Cela donne une méthode pour associer un réel à certaines suites divergentes : on dit qu'une suite (u_n) converge au sens de Cesaro vers ℓ si la suite associée (U_n) converge vers ℓ.

Intérêt : si (u_n) converge vers ℓ, alors (U_n) converge vers ℓ aussi, on n'a rien perdu ; mais sinon, on a parfois une sorte de limite (en un sens plus faible que le sens habituel) qui se comporte raisonnablement. Il est par exemple facile de montrer (exercice) que si (u_n) et (v_n) convergent au sens de Cesaro vers ℓ et m, alors $(u_n + v_n)$ converge au sens de Cesaro vers $\ell + m$ et que pour toute constante λ, la suite (λu_n) converge au sens de Cesaro vers $\lambda\ell$.

Exemple. Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k$. La suite (u_n) diverge mais elle converge au sens de Cesaro vers $1/2$.

En effet, calculons la suite des moyennes (U_n). Pour n impair, sur les $n+1$ valeurs $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n$, il y en a $(n+1)/2$ qui valent 1 (pour les indices $0, 2, \ldots, n-1$) et $(n+1)/2$ qui valent 0 (les autres indices), de sorte que $U_n = 1/2$. Pour n pair, on trouve que $U_n = (n+1)/(2n+1)$. Les sous-suites des termes pairs et des termes impairs convergent vers $1/2$, d'où la suite (U_n) converge vers $1/2$.

Il n'est donc plus si arbitraire de définir : $\boxed{A = \lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}}$.

Autre approche : séries formelles
Au lieu de la somme A, on choisit un paramètre $q \in]-1,1[$ et on pose :

$$f(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k q^k.$$

Sens ? C'est, si on en prouve l'existence, la limite de la suite

$$v_n(q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k.$$

Si l'on remplace q par 1, on (re)trouve : $v_n(1) = u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$. On a :

$$v_n(q) = \frac{1-(-q)^n}{1-(-q)} = \frac{1}{1+q} + \frac{(-q)^n}{1+q}.$$

Lorsque q est fixé dans $]-1,1[$, il est classique que la suite $\big((-q)^n\big)$ converge vers 0. Cela signifie que f est bien définie sur l'intervalle $]-1,1[$ et vaut :

$$f(q) = \frac{1}{1+q}.$$

Du coup, il est tentant de poser : $\boxed{A = \lim_{q \to 1} f(q) = \frac{1}{2}}$.
Attention, on a donné un sens à A au prix d'une permutation de deux limites : ayant constaté que la suite $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \lim_{q \to 1} \sum_{k=0}^{n} v_n(q)$ ne converge pas, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{q \to 1} \sum_{k=0}^{n} v_n(q) = \lim_{n \to +\infty} (\underbrace{1-1+1-1+1-\cdots}_{n+1 \text{ termes}})$$

n'existant pas, on lui donne la valeur

$$\lim_{q \to 1} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} v_n(q) = \lim_{q \to 1} f(q) = \frac{1}{2}$$

de façon un peu forcée. Cette permutation n'est pas anodine.

Procédé d'Abel
Variante : au lieu d'introduire $q \in]-1,1[$ et faire tendre q vers 1, on pose $q = e^{-t}$ et on fait tendre t vers 0 par valeurs positives. Cela revient à introduire

$$F(t) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n e^{-nt} = f(e^{-t}) = \frac{1}{1+e^{-t}}.$$

Rien de nouveau pour l'instant : $\boxed{A = \lim_{t \to 0} F(t) = \frac{1}{2}}$.

3° **Deuxième étape :** $B = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$

Approche informelle

On calcule sans trop se soucier du sens :

$$\begin{array}{rcccccccc} B & = & 1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +\cdots \\ A & = & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +\cdots \\ \hline B+A & = & 2 & & +2 & & +2 & & +\cdots, \end{array}$$

de sorte que

$$B + A = 2B,$$

ou encore $\boxed{B = A = 1/2}$.

Approches plus formelles

On pose, pour n entier :

$$y_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termes}} = n.$$

La suite (y_n) diverge vers $+\infty$. La moyenne de Cesaro ne marche pas mieux : la suite des moyennes est

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2},$$

qui diverge aussi vers l'infini.

En introduisant un $q \in]-1, 1[$, ce n'est pas mieux :

$$z_n(q) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{1-q} + \frac{q^n}{1-q},$$

qui tend vers $1/(1-q)$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Problème : $1/(1-q)$ diverge vers $+\infty$ lorsque q tend vers 1^-. Nouvel échec.

Par le procédé d'Abel, on prend $q = e^{-t}$ avec $t > 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{1}{1-e^{-t}}.$$

Que se passe-t-il lorsque t tend vers 0 ? Voyons, en anticipant un peu sur le chapitre des développements limités :

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \frac{1}{1-\left(1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)} = \frac{1}{t\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right)} = \frac{1}{t}\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right)^{-1} = \frac{1}{t}\left(1+\frac{t}{2}+o(t)\right)$$

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + o(1),$$

ce qui signifie précisément que $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) = 0$.

L'idée d'Abel, pour attribuer une valeur finie à la somme divergente, consiste à faire comme si le terme qui explose, $\frac{1}{t}$, n'existait pas... Autrement dit, si on oublie l'infini qu'on a caché sous le tapis, on trouve $\boxed{B = 1/2}$... comme précédemment ! Une coïncidence dont Abel doit avoir montré qu'elle ne tenait en rien du miracle.

4° **Troisième étape :** $1-2+3-4+5-\cdots$

On s'intéresse à présent à la somme infinie
$$C = 1-2+3-4+5-6+\cdots .$$

Approche informelle

Admettant qu'il y a une façon raisonnable de définir une telle somme, on la « calcule » :
$$\begin{array}{rcccccccl}
C & = & 1 & -2 & +3 & -4 & +5 & -6 & +\cdots \\
A & = & 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +\cdots \\
\hline
C-A & = & 1-1 & -(2-1) & +(3-1) & -(4-1) & +(5-1) & -(6-1) & +\cdots \\
C-A & = & & -1 & +2 & -3 & +4 & -5 & +\cdots = -C,
\end{array}$$

et la relation $C-A=-C$ donne : $\boxed{C = \dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{4}}$.

Approche par la convergence au sens de Cesaro

Une approche plus formelle tombe vite sur un problème. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$w_n = 1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}\times n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\times k.$$

Vu que $w_n - w_{n-1} = (-1)^n \times n$, on en déduit que la suite (w_n) diverge : si elle avait une limite L, la suite $\big((-1)^{n-1}\times n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers $L-L=0$, ce qui est absurde.

Essayons la convergence au sens de Cesaro. D'abord, on trouve un expression de w_n sans signe de sommation. Pour un nombre pair de termes, c'est-à-dire n pair, disons $n=2p$, on trouve :
$$w_n = w_{2p} = \Big(\underbrace{(1-2)+(3-4)+\cdots+\big((2p-1)-2p\big)}_{p \text{ parenthèses}}\Big) = -p = -\frac{2p}{2} = -\frac{n}{2}.$$

Pour n impair, disons $n=2p+1$, on trouve :
$$w_n = w_{2p+1} = w_{2p} + (2p+1) = p+1 = \frac{n+1}{2}.$$

De façon plus compacte, on peut écrire :
$$w_n = (-1)^{n-1}\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \;;$$

Les premières valeurs de w_n $(n \geqslant 1)$ sont :
$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, \text{ etc.}$$

Passons à la suite des moyennes
$$W_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} w_k.$$

Si on somme un nombre pair de termes, disons $2p$, on trouve zéro ; si on somme $2p+1$ termes, le terme supplémentaire vaut $p+1$ et la moyenne des termes vaut $(p+1)/(2p+2)$ qui tend vers $1/2$.

Ainsi, la suite (W_n) n'est toujours pas convergente... Mais sa moyenne de Cesaro, elle, converge vers $\frac{0+1/2}{2} = 1/4$, qui est donc la seule valeur raisonnable pour la somme initiale :
$$\boxed{C = 1-2+3-4+5-6+\cdots = \frac{1}{4}}.$$

Approche par une q-série
C'est juste une histoire de q à ajouter au bon endroit. On introduit

$$x_n(q) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \times kq^k,$$

de sorte que $x_n(1) = w_n$.
Mais on peut reproduire le calcul informel de façon plus sérieuse pour calculer $x_n(q)$. On voit que $x_n(q)/q$ est la dérivée par rapport à q de

$$g_n(q) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} q^k = -\frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q},$$

(en effet, $g_n'(q) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} kq^{k-1} = x_n(q)/q$), ce qui donne :

$$x_n(q) = qg_n'(q) = \frac{1}{(1+q)^2} + \frac{(-q)^{n+1}}{(1+q)^2} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)q^{n+1}}{1+q},$$

d'où l'on déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \times kq^k = \lim_{n\to+\infty} x_n(q) = \frac{q}{(1+q)^2}.$$

Comme dans le paragraphe précédent, on voudrait prendre pour valeur de C

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{k-1} \times k = \lim_{n\to+\infty} \lim_{q\to 1} x_n(q),$$

limite *qui n'existe pas au sens classique*, ce qui incite à prendre à la place

$$\boxed{C = \lim_{q\to 1} \lim_{n\to+\infty} x_n(q) = \lim_{q\to 1} \frac{1}{(q+1)^2} = \frac{1}{4}}.$$

Procédé d'Abel
En posant $q = e^{-t}$ et en faisant $t \to 0^+$, on obtient la même valeur : 1/4 (vérifier...).

5° ***Now for the real thing :*** $1+2+3+4+5+\cdots$
Tentons d'attribuer une valeur à

$$D = 1+2+3+4+5+6+\cdots.$$

Approche informelle

$$\begin{array}{rcccccccc}
D & = & 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +\cdots \\
C & = & 1 & -2 & +3 & -4 & +5 & -6 & +\cdots \\
\hline
D-C & = & & (2+2) & & +(4+4) & & +(6+6) & +\cdots \\
D-C & = & & 4\times 1 & & +4\times 2 & & +4\times 3 & +\cdots = 4D
\end{array}$$

et la relation $D - C = 4D$ donne : $\boxed{D = -\frac{1}{3}C = -\frac{1}{12}}$.

Convergence au sens de Cesaro
Comme pour $1+1+1+\cdots$, cette idée ne fonctionne pas.

Version q-série
On a (essentiellement) démontré que pour $q \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(-q)^k = \frac{q}{(1+q)^2}.$$

En remplaçant q par $-q$ et en faisant attention au signe, il vient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

On ne peut pas faire tendre directement q vers 1, cela explose. On peut bricoler un peu mais le résultat n'est pas très naturel.

Version Abel
Mais prenons $q = e^{-t}$ avec $t > 0$ pour faire tendre t vers 0 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-kt} = \frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^2}.$$

On montre avec des techniques de développement limité qui vous seront bientôt familières :

$$\frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{12} + o(t).$$

Cela signifie que lorsque l'on ignore le terme $1/t^2$ et que l'on fait tendre t vers 0, on trouve pour valeur finie – comme au-dessus !

$$\boxed{D = 1+2+3+4+5+\cdots = -\frac{1}{12}}.$$

En guise de conclusion
Le vrai miracle, ce n'est pas tant de pouvoir donner une valeur à une somme infinie qui diverge : c'est que plusieurs méthodes donnent la même valeur. L'expliquer et trouver des méthodes systématiques, c'est un chapitre amusant de l'analyse – que je ne connais pas d'ailleurs. On parle de procédés de resommation : ils consistent à trouver des valeurs finies cachées sous des infinis que l'on met sous le tapis.
Fantaisie de mathématicien ? Pas du tout ! La théorie de la renormalisation en physique quantique consiste à appliquer des procédés de ce genre et conduit à la meilleure coïncidence de toute la physique entre une prédiction théorique et une valeur expérimentale pour la constante de structure fine $\alpha \simeq 1/137$.

Remarque. Au début de ce texte, le verbe *croire* est employé plusieurs fois, ce qui semble peu rigoureux. On peut le comprendre de deux façons :
— soit on prend l'argument qui suit comme une « monstration » plutôt qu'une démonstration, qui a pour but de convaincre l'être humain qu'est le lecteur en faisant appel à son intuition et son « bon sens » et pas de produire une preuve mathématique formalisée ;
— soit on se place dans un système formel (axiomatique) adéquat, ce qui permet de remplacer le verbe *croire* par le verbe *admettre*.