Exercice 1

1) Le polynôme caractéristique de A est de degré 3, unitaire. L'énoncé assure qu'il possède une racine réelle triple, qu'on notera α : il est donc de la forme $\chi_A = (X-\alpha)^3$. On sait que la trace de A se lit sur le polynôme caractéristique, comme opposée du coefficient de X^2 : c'est 3α. On peut par ailleurs la lire sur A : c'est $-6+3+0=-3$. On conclut que $\alpha=-1$ donc $\chi_A = (X+1)^3$.

2) a) Les matrices colonnes respectives des vecteurs f_3, f_2 et f_1 (exprimées dans la base canonique) sont respectivement :

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad X_2 = (A+I)X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad X_1 = (A+I)X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où les valeurs des vecteurs $f_2 = (-1,2,1)$ et $f_1 = (-2,3,1)$.

La famille proposée étant composée de trois vecteurs en dimension 3, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Pour ce faire on peut par exemple considérer son déterminant dans la base canonique, dont le calcul se laisse initier par blocs :

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

b) Si on manque d'élégance, on se borne à calculer matriciellement $(A+I)X_1$; après avoir trouvé 0 on conclut que $(u+\mathrm{Id})(f_1) = 0$. Si on est plus habile (ou plus paresseux), on préfèrera écrire que $(u+\mathrm{Id})(f_1) = (u+\mathrm{Id})^3(f_3) = \chi_u(u)(f_3) = 0$ (par Cayley-Hamilton).

c) On remplit par colonnes la matrice T demandée, au vu des relations $(u+\mathrm{Id})(f_1) = 0$ donc $u(f_1) = -f_1$, $(u+\mathrm{Id})(f_2) = f_1$ donc $u(f_2) = f_1 - f_2$ et enfin $(u+\mathrm{Id})(f_3) = f_2$ donc $u(f_3) = f_2 - f_3$; on obtient :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On sait par ailleurs que les matrices A et T sont liées par la relation $T = P^{-1}AP$ dès lors qu'on choisit pour P la matrice de passage de la base canonique à la base (f_1, f_2, f_3) c'est-à-dire explicitement :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1) Pour tout sous-espace H de E stable par u et tout polynôme P il est “clair” que $P(u_{|_H}) = (P(u))_{|_H}$ - et en tous cas le correcteur considèrera avec bienveillance les copies ayant considéré ce point comme évident - c'est d'ailleurs ce que fait le cours au paragraphe “réduction d'un endomorphisme induit” alors ne soyons pas plus royalistes que le roi. Si on est quand même très méticuleux, on peut remarquer que la restriction à un espace stable commute à la composition, à l'addition et à la multiplication scalaire (par trois vérifications immédiates vecteur par vecteur) donc à la substitution dans un polynôme. Glissons sur les détails.

Cela posé, on a donc $\pi_u(w) = \pi_u(u_{|_G}) = (\pi_u(u))_{|_G} = 0_{|_G} = 0$.

Dès lors que l'on sait que π_u est annulateur de w on en déduit qu'il est multiple de π_w.

Le réel -1 est racine multiple de π_w, il est donc aussi racine multiple de π_u. Le polynôme π_u a donc au moins une racine multiple, ce qui entraîne que u n'est pas diagonalisable.

2) $(Q(u))_{|_F} = Q(u_{|_F}) = Q(v)$. Or Q est multiple de π_v donc $Q(v) = 0$. Par le même raisonnement $(Q(u))_{|_G} = Q(w) = 0$. Comme E est somme de F et G, on en déduit que $Q(u) = 0$.

3) Par la question 2, π_u divise Q ; par la question 1, $\pi_w = (X-1)(X+1)^2$ divise π_u et, de façon analogue $\pi_v = (X-1)(X-5)$ divise π_u. En raisonnant sur les décompositions en irréductibles et en gardant en tête que π_u est par convention unitaire, on en déduit que $\pi_u = Q$.

Exercice 3

1) Il y a deux façons de faire, commençons par une pas élégante : soit M une matrice commutant avec B, on note par les lettres de a à i les neuf coefficients de M puis on explicite sur les coefficients la relation $BM = MB$ et hop ça marche. On peut faire plus joli quand même : la commutation entraîne que les sous-espaces propres de B sont stables par M ; or ces sous-espaces propres sont les axes de coordonnées. C'est donc que ces trois axes sont stables par M ce qui est précisément dire que M est diagonale.

2) Il y a au moins deux façons de faire. L'une est de chercher P sous la forme $aX^2 + bX + c$; ça conduit à poser le système suivant, de trois équations à trois inconnues notées a, b et c :

$$\begin{cases} a & +b & +c & = x \\ 4a & +2b & +c & = y \\ 9a & +3b & +c & = z \end{cases}$$

Le déterminant de ce système n'est pas nul, il a donc des solutions.
Une autre est de se souvenir du mot-clé "polynômes d'interpolation de Lagrange", on vous laissera retrouver ça au moyen de votre moteur de recherche préféré.

3) Soit M une matrice carrée qui commute avec B. Par la première question, il existe trois réels x, y et z tels que $M = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$; par la question 2 il existe donc un polynôme P tel que :

$$M = \begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 \\ 0 & P(2) & 0 \\ 0 & 0 & P(3) \end{pmatrix} = P(B).$$

4) C'est vrai. Soit Q une matrice inversible telle que $B = Q^{-1}CQ$ et posons $N = Q^{-1}MQ$. On vérifie sans mal que N commute avec B. On en déduit donc qu'il existe un P tel que $N = P(B)$, et de cela découle tout aussi facilement que $M = P(C)$.

Exercice 4

1) Fait en TD, inutile de le reproduire ici.

2) Sur l'ouvert $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'application h est définie comme quotient de sommes ou différences de fonctions obtenues par composition des fonctions coordonnées, de la fonction sinus, de la mise au carré et de la mise au cube. Toutes ces bêtes sont de classe $\mathcal{C}^1$; la fonction h l'est aussi. En particulier elle admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0\}$.
Au point $(0,0)$ il convient d'introduire successivement :
* la première fonction partielle $\varphi_1(s) = \phi(s,0)$. On constate que $\varphi_1(s) = s$ si $s \neq 0$ tandis que $\varphi_1(0) = 0$, donc φ_1 est l'application identique. Elle est donc dérivable en 0 et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en $(0,0)$.
* la deuxième fonction partielle $\varphi_2(t) = \phi(0,t)$. On constate que $\varphi_2(t) = -\dfrac{\sin^3 t}{t^2} = -t + o(t)$ pour t différent de 0 (et, pour le o, t tendant vers 0) tandis que $\varphi_2(0) = 0$. Il en découle que φ_2 est une fonction continue d'une variable qui admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 ; c'est donc une fonction dérivable en 0 ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe aussi en $(0,0)$.

Exercice 5

1) a) Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Pour $(u,v) \in \mathbf{R}^2$,

$$\varphi(u,v) = (x,y) \iff \begin{cases} u & & = x \\ u & +ve^{-u} & = y \end{cases} \iff \begin{cases} u & & = x \\ x & +ve^{-x} & = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u & = & x \\ ve^{-x} & = & y - x \end{cases} \iff \begin{cases} u & = & x \\ v & = & (y-x)e^{x} \end{cases}$$

On constate avoir trouvé un et un seul antécédent pour (x, y). Ceci prouve que φ est bijective et on a au passage identifié $\varphi^{-1}(x, y = (x, (y - x)e^x)$.

b) Tant φ que φ^{-1} s'expriment comme somme de composées de fonctions évidemment de classe $\mathcal{C}^1$.

2) Avec les abus de langage habituels, et en notant (x, y) au lieu de $\varphi(u, v)$ on a :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + (1 - ve^{-u})\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (*)$$

Si on se refuse à ce genre d'abus de langage, on peut écrire :

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2 \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}[\varphi(u, v)] + (1 - ve^{-u})\frac{\partial f}{\partial y}[\varphi(u, v)]$$

mais je ne vous encourage pas particulièrement à être si tâtillons, ça n'apporte rien que de l'alourdissement des formules.

3) Remarquons d'abord que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f \circ \varphi$ aussi (par composition) et que, réciproquement, si $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ aussi.
Ceci étant réglé, et avec les abus de langages habituels, on remarque que :

$$1 + x - y = 1 + u - (u + ve^{-u}) = 1 - ve^{-u}.$$

En reportant cette observation dans $(*)$ on a réécrit celle-ci comme :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + (1 + x - y)\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (*)$$

Tout ceci prouve l'équivalence proposée.
(J'ai aussi écrit pour les puristes une solution sans abus de langage, disponible en annexe). Je ne recommande pas d'être puriste, les abus de langage en calcul différentiel, c'est Bien.

4) a) Soit $v \in \mathbf{R}$, et soit g_1 l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g_1(t) = g(t, v)$. Alors pour tout t réel, le nombre $g_1'(t)$ existe et vaut $\dfrac{\partial g}{\partial u}(t, v)$, qui est une fonction continue. En utilisant le théorème parfois pompeusement dénommé "fondamental de l'analyse" on a donc pour tout u réel :

$$g(0, v) + \int_0^u \frac{\partial g}{\partial u}(t, v)\, dt = g(0, v) + \int_0^u g_1'(t)\, dt = g(0, v) + [g_1(u) - g_1(0)] = g(0, v) + g_(u, v) - g(0, v) = g(u, v).$$

b) Supposons g solution de (E') et notons $c(v) = g(0, v)$. Par application du a, pour tout (u, v) de $\mathbf{R}^2$:

$$g(u, v) = c(v) + \int_0^u 0\, dt = c(v) + 0 = c(v).$$

La fonction c est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de g et de $v \mapsto (0, v)$.

c) Réciproquement, il est clair que si c est de classe $\mathcal{C}^1$, l'application g définie par $g(u, v) = c(v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie en tout point la condition $\dfrac{\partial g}{\partial v} = 0$. Les solutions de (E') sont donc les $(u, v) \mapsto c(v)$ où c parcourt l'ensemble des applications $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

5) En rapprochant les questions 1 a), 3) et 4 c) et avec les abus de langage usuels, on conclut que f est solution de (E) si et seulement si elle est de la forme :

$$f(x, y) = c((y - x)e^x)$$

où c est une fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

ANNEXE : solution parfaitement propre de la question 3 de l'exercice 5.
(Je ne conseille pas de faire de tels efforts, mais on peut y tenir)...
On notera π_1 et π_2 les applications coordonnées de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$ respectivement définies par $\pi_1(x,y) = x$ et $\pi_2(x,y) = y$.
Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.
Remarquons d'abord que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f \circ \varphi$ aussi (composition de fonctions $\mathcal{C}^1$), et que réciproquement si $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ l'est aussi.
Ceci étant réglé, on peut alors écrire :

$$
\begin{aligned}
& f \circ \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \text{ est solution de } (E') \\
\iff & f \circ \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u}(u,v) = 0 \\
\iff & f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}[\varphi(u,v)] + (1 - ve^{-u})\frac{\partial f}{\partial y}[\varphi(u,v)] = 0 \\
\iff & f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}[\varphi(u,v)] + (1 + u - (u + ve^{-u}))\frac{\partial f}{\partial y}[\varphi(u,v)] = 0 \\
\iff & f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}[\varphi(u,v)] + (1 + \pi_1[\varphi(u,v)] - \pi_2[\varphi(u,v)])\frac{\partial f}{\partial y}[\varphi(u,v)] = 0 \\
\iff & f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} + (1 + \pi_1 - \pi_2)\frac{\partial f}{\partial y}\right)[\varphi(u,v)] = 0 \\
\iff & f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} + (1 + \pi_1 - \pi_2)\frac{\partial f}{\partial y}\right) \circ \varphi = 0 \\
\iff & f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \quad \frac{\partial f}{\partial x} + (1 + \pi_1 - \pi_2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\
\iff & f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1 + x - y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \\
\iff & f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et } \text{ est solution de } (E).
\end{aligned}
$$