Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025

Analyse IV Durée: 1 heure 30

Examen de session 2 du jeudi 26 juin 2025

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$, on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r pour la norme $\|\cdot\|_1$.

1. Donner un exemple de norme dans $\mathbb{R}^n$ qui est équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$, et préciser les meilleures constantes possibles dans la relation d'équivalence des normes (démontrer le résultat).
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Prouver que la boule $B(x, r)$ est ouverte.
3. Déterminer explicitement l'adhérence $\bar{B}(x, r)$ de la boule $B(x, r)$.
4. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y \neq x$, et $r' > 0$. Donner une condition suffisante portant sur x, y, r et r' pour que l'intérieur de $\bar{B}(x, r) \cap \bar{B}(y, r')$ soit non vide.

Exercice 2.

1. (a) Montrez que l'intégrale
$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(tx)}{1 + x^2}\, dx$$
converge pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Donnez la valeur explicite de cette intégrale pour $t = 0$.
2. (a) Montrez que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrez que, pour $t \neq 0$,
$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2x\, \sin(tx)}{t(1 + x^2)^2}\, dx$$
   (c) En déduire la limite de F en $+\infty$.
3. (a) Montrez que, pour $t > 0$,
$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{t\, \cos(y)}{t^2 + y^2}\, dy$$
   (b) Montrez que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimez sa dérivée sous la forme d'une intégrale.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,-1) \quad \text{ et } \quad f(0,-1)=0.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,-1)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier l'existence des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,-1)\}$ et donner explicitement $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,1)\}$.
4. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,-1)\}$, on pose $g(x,y) = f(y+1, x-1)$.
   (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,-1)\}$ et exprimer ses dérivées partielles premières en fonction de celles de f (on ne demande pas de remplacer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ par leurs expressions).
   (b) Montrer que pour tout $(x,y) \neq (0,-1)$, $g(x,y) = f(x,y)$.
   (c) En déduire l'expression explicite de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,-1)$.
5. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,-1)$ et les calculer.
6. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
7. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,-1)$ et les calculer.
8. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Correction de l'examen de session 2 d'analyse iv du 24 juin 2025

Correction de l'exercice 3

1. Dans toute la suite de l'exercice, on notera $U = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,-1)\}$. Soit $(a,b) \in U$. On note $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Posons $\rho = \|(a,b)-(0,-1)\| > 0$ puisque $(a,b) \neq (0,-1)$ et montrons que la boule ouverte de centre (a,b) et de rayon ρ, notée $B((a,b),\rho)$, est incluse dans U. Soit $(x,y) \in B((a,b),\rho)$. Supposons par l'absurde que $(x,y) \notin U$, alors $(x,y) = (0,-1)$ d'où

$$\rho = \|(0,-1)-(a,b)\| = \|(x,y)-(a,b)\| < \rho$$

ce qui est contradictoire. Ainsi, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2.
   - Sur l'ouvert U, f est le quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. En particulier, elle est donc continue sur U.
   - Soit $(x,y) \in U$, alors

   $$0 \leq |f(x,y)-f(0,-1)| = \frac{x^2(y+1)^2}{x^2+(x+1)^2} \leq x^2 \leq \|(x,y)-(0,-1)\|^2 \underset{(x,y)\to(0,-1)}{\longrightarrow} 0$$

   puisque $(y+1)^2 \leq x^2+(y+1)^2$. La dernière inégalité ci-dessus étant d'ailleurs aussi vraie pour $(x,y) = (0,-1)$, cela démontre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y) = f(0,-1)$ et prouve la continuité de f en $(0,-1)$. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. On a vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, donc elle admet des dérivées partielles premières sur U. De plus, on a

$$\forall(x,y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(y+1)^2(x^2+(y+1)^2)-(x^2(y+1)^2)(2x)}{(x^2+(y+1)^2)^2} = \frac{2x(y+1)^4}{(x^2+(y+1)^2)^2}.$$

4. (a)
   - La fonction g est la composée $f \circ h$ où $h : (x,y) \in U \longmapsto (y+1, x-1)$. Puisque les fonctions coordonnées (notées h_1 et h_2) de h sont polynomiales, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, donc h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. De plus, pour tout $(x,y) \in U$, on a $(y+1, x-1) \neq (0,-1)$ donc h est à valeurs dans U. Par composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, g est donc aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
   - On utilise la formule de dérivation en chaîne afin de calculer les dérivées partielles de g. Pour tout $(x,y) \in U$, on a

   $$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(h(x,y)) + \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(h(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial y}(y+1,x-1)$$
   $$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(h(x,y)) + \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(h(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(y+1,x-1).$$

   (b) Soit $(x,y) \in U$, alors on a vu que $(y+1, x-1) \in U$ donc

   $$g(x,y) = f(y+1,x-1) = \frac{(y+1)^2(x-1+1)^2}{(y+1)^2+(x-1+1)^2} = \frac{x^2(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2} = f(x,y).$$

   (c) Puisque $g = f$ sur U, on obtient directement : pour tout $(x,y) \in U$,

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y+1,x-1) = \frac{2(y+1)x^4}{(x^2+(y+1)^2)^2}.$$

5. Pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{1}{t}(f(t,-1)-f(0,-1)) = 0 \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)$ existe et vaut 0. De même,

$$\frac{1}{t}(f(0,t-1)-f(0,-1)) = 0 \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)$ existe et vaut 0.

6. On a déjà vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. De plus, f admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$, continues au moins sur U. Étudions leur continuité en $(0,-1)$. Soit $(x,y) \in U$, alors

$$0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)\right| = \frac{2\,|x|\,(y+1)^4}{(x^2+(y+1)^2)^2} \leq 2\,|x| \leq 2\|(x,y)-(0,-1)\| \underset{(x,y)\to(0,-1)}{\longrightarrow} 0$$

puisque $(y+1)^4 \leq x^4 + 2x^2(y+1)^2 + (y+1)^4 = (x^2+(y+1)^2)^2$. Ainsi $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)$ ce qui montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

De même, pour $(x,y) \in U$,

$$0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)\right| = \frac{2\,|y+1|\,x^4}{(x^2+(y+1)^2)^2} \leq 2\,|y+1| \leq 2\|(x,y)-(0,-1)\| \underset{(x,y)\to(0,-1)}{\longrightarrow} 0$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles premières de f étant continues sur (l'ouvert) $\mathbb{R}^2$, il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

7. Pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,-1) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)\right) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1)$ existe et vaut 0. Puis

$$\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)\right) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,-1)$ existe et vaut 0. De plus,

$$\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t-1) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,-1)\right) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,-1)$ existe et vaut 0. Enfin,

$$\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,t-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)\right) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1)$ existe et vaut 0.

8. On a déjà vu que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. De plus, pour tout $(x,y) \in U$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(y+1)^4(x^2+(y+1)^2)^2 - 2x(y+1)^4(4x^3+4x(y+1)^2)}{(x^2+(y+1)^2)^4} = \frac{-6x^4(y+1)^4 - 4x^2(y+1)^6 + 2(y+1)^8}{(x^2+(y+1)^2)^4}.$$

On remarque alors que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}-1\right) = \frac{-8/n^8}{16/n^8} = -\frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) \quad \text{avec} \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,-1).$$

Ainsi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ n'est pas continue en $(0,-1)$, donc f ne peut pas être de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.