Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2023-2024

Analyse IV — Durée: 1 heure 30

Examen de session 2 du vendredi 21 juin 2024

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.
Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 - y^2 + 2 \text{ si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 - 2y^2 + 3 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ avec n entier supérieur ou égal à 1. On munit E de la norme infinie $\| \ \|$ définie par $\|M\| = \max\{|m_{ij}| \ ; 1 \leq i, j \leq n\}$ où $M = (m_{ij})$. Dans la suite, on notera I la matrice identité de E.

1. Soit $M \in E$. Montrer que $\|M^2\| \leq n\|M\|^2$.
2. En déduire que pour tout entier $j \geq 2$, l'expression M^j est un $o(\|M\|)$ quand $M \to 0_E$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels et soit $f : E \to E$ définie par $f(M) = P(M)$.
   (a) Montrer que f est différentiable en la matrice nulle et expliciter $\mathrm{d}f(0_E)$.
   (b) Soit $j \geq 2$ un entier et $M \in E$. Montrer que $(I + M)^j \underset{M \to 0}{=} I + jM + o(\|M\|)$.
   (c) En utilisant la question précédente, montrer que f est différentiable en I et déterminer $\mathrm{d}f(I)$ en fonction de P.

Exercice 3.

1. Soit (E, N) un espace vectoriel normé et A une partie de E. Montrez que si $a \in A$ appartient à $\overset{\circ}{A}$, l'intérieur de A, alors toute suite dans E qui converge vers a est incluse dans A à partir d'un certain rang.

   Dans toute la suite de l'exercice, on considère l'espace $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, muni d'une norme N quelconque. On rappelle que $SL_3(\mathbb{C})$ est l'ensemble des éléments de $M_3(\mathbb{C})$ de déterminant 1.
2. (a) Montrez que l'application $\det : M_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est continue.
   (b) Montrez que $SL_3(\mathbb{C})$ est une partie fermée de $M_3(\mathbb{C})$.
3. Soit $S \in SL_3(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = S - \dfrac{1}{2^n} I_3$.
   (a) Montrez qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifie $P(x_n) = 1$ pour une infinité de $x_n \in \mathbb{C}$ est forcément constant.
   (b) En déduire que seul un nombre fini de S_n appartient à $SL_3(\mathbb{C})$.
   (c) En déduire que $SL_3(\mathbb{C})$ est une partie de $M_3(\mathbb{C})$ d'intérieur vide.
4. Montrez que $GL_3(\mathbb{C})$ est une partie ouverte et dense de $M_3(\mathbb{C})$.

Exercice 4. Pour x réel, on pose, lorsque cela a un sens, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{xt} - e^{-2t}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{e^{at} - e^{-2t}}{t} \end{array}$$

   (a) Soit $t \in]0;+\infty[$. Déterminer, en fonction de a, le signe de $\varphi_a(t)$.

   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que φ_a soit intégrable sur $]0;+\infty[$.

2. Montrer que la fonction F est définie sur $]-\infty;0[$ mais ne l'est pas en 0.

3. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et exprimer $F'(x)$ pour $x < 0$ à l'aide d'une intégrale.

4. Soient b et x deux réels strictement négatifs. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{bt} e^{ixt}\,\mathrm{d}t$.

5. En déduire une expression de $F(x)$ à l'aide de fonctions usuelles (sans intégrale) pour $x < 0$.

Correction de l'examen de session 2 d'analyse iv du 21 juin 2024

Correction de l'exercice 3

1. Si $a \in \overset{\circ}{A}$ alors il existe $r > 0$ telle que la boule $B(a, r)$ est incluse dans $\overset{\circ}{A}$, donc dans A. Si une suite (a_n) converge vers a, elle est forcément entièrement incluse dans $B(a, r)$ à partir d'un certain rang.
2. det est polynômiale en les coefficients.
3. $SL_3(\mathbb{C})$ est l'image réciproque par det de $\{1\} \subset \mathbb{C}$. C'est l'image réciproque continue d'un fermé, donc un fermé.
4. (a) Le polynôme $P - 1$ a une infinité de racines, donc il est nul.
   (b) Dire que S_n appartient à $SL_3(\mathbb{C})$, c'est dire que $\det(S_n) = 1$, ce qui revient à $\chi_S(2^{-n}) = 1$. Cela ne peut arriver qu'un nombre fini de fois, car sinon χ_S serait constant, alors qu'il est de degré 3.
   (c) La suite (S_n) converge clairement vers S (par exemple pour la norme associée au sup des coeffs, donc pour toutes les normes). Pourtant, seul un nombre fini des termes de cette suite est dans $SL_3(\mathbb{C})$, donc S n'est pas un point intérieur de A. L'intérieur de $SL_3(\mathbb{C})$ est donc vide.
5. $GL_3(\mathbb{C})$ est l'image réciproque de $\mathbb{C}^*$ par det donc c'est un ouvert.
   Si on reprend la même suite (S_n) qui converge vers $S \in M_3(\mathbb{C})$, alors cette suite est dans $GL_3(\mathbb{C})$ à partir d'un certain rang car S n'a qu'un nombre fini de valeurs propres. Cela donne la densité.

Correction de l'exercice 4

1. (a) Comme $t > 0$, $at \leq -2t$ pour $a \leq -2$ et $at > -2t$ pour $t > -2$. Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que $\varphi_a(t) = \dfrac{e^{at} - e^{-2t}}{t} \leq 0$ si $a \leq -2$ et $\varphi_a(t) > 0$ si $a > -2$.
   (b) La fonction φ_a est continue sur $]0; +\infty[$, donc intégrable sur tout segment $[A; B]$ inclus dans $]0; +\infty[$. Au voisinage de 0,
   $$\varphi_a(t) = \frac{(1 + at + o(t)) - (1 - 2t + o(t))}{t} = \frac{(a+2)t + o(t)}{t} = a + 2 + o(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} a + 2$$
   La fonction φ_a est donc prolongeable par continuité en 0, don intégrable sur $]0; A]$ pour $A > 0$. Enfin, si $a > 0$, $\varphi_a(t)$ tend vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$, donc il existe $C > 0$ tel que, pour tout $t \geq C$, $\varphi_a(t) \geq 1$, donc φ_a n'est pas intégrable sur $[C; +\infty[$. Si $a = 0$, alors $\varphi_a(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ par le règle de Riemann. Enfin, si $a < 0$, alors $t^2\varphi_a(t) = te^{at} - te^{-2t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui entraîne que $\varphi_a(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par conséquent, φ_a est intégrable sur $[B; +\infty[$ pour $B > 0$. Finalement, φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si, $a < 0$.
2. Pour $x \leq 0$, posons $h_x : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h_x(t) = \dfrac{e^{xt} - e^{-2t}}{t}\cos(xt)$. La fonction h_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie :
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad |h_x(t)| = \frac{\left|e^{xt} - e^{-2t}\right|}{t}|\cos(xt)| \leq \frac{\left|e^{xt} - e^{-2t}\right|}{t} = |\varphi_x(t)|$$
   Ainsi, si $x < 0$, par comparaison, la fonction h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et $F(x)$ est bien défini. Si $x = 0$, alors $h_x = \varphi_0(t)$ est une fonction non intégrable par la question précédente, à valeurs positives, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente et F n'est pas définie en 0.
3. Posons $f :] - \infty; 0[\times]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \dfrac{e^{xt} - e^{-2t}}{t}\cos(xt)$.

- On peut écrire $h = \dfrac{\exp\circ(p_1 \times p_2) - \exp\circ(-2p_2)}{p_2} \times \cos\circ(p_1 \times p_2)$ avec $p_1 : (x,t) \longmapsto x$ et $p_2 : (x,t) \longmapsto t$ polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\exp, \cos$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par opérations et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*$ donc en particulier continue sur cet ensemble. De plus, elle admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui est aussi continue sur cet ensemble.
- Soit $[b;a] \subset]-\infty;0[$. Soit $(x,t) \in [b;a] \times \mathbb{R}_+^*$, par la question 1a et croissance de l'exponentielle, si $x \leq -2$

$$|f(x,t)| \leq \frac{\left|e^{xt} - e^{-2t}\right|}{t} = \frac{e^{-2t} - e^{xt}}{t} \leq \frac{e^{-2t} - e^{bt}}{t} = -\varphi_b(t)$$

et si $x > -2$,

$$|f(x,t)| \leq \frac{\left|e^{xt} - e^{-2t}\right|}{t} = \frac{e^{xt} - e^{-2t}}{t} \leq \frac{e^{at} - e^{-2t}}{t} = \varphi_a(t)$$

d'où $|f(x,t)| \leq \varphi_a(t) - \varphi_b(t) := \varphi_{a,b}(t)$, avec $\varphi_{a,b}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables.
- Enfin, soient $[b;a] \subset]-\infty;0[$ et $(x,t) \in [b;a] \times \mathbb{R}_+^*$, par inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|e^{xt}\cos(xt) - (e^{xt} - e^{-2t})\sin(xt)\right| \leq 2e^{xt} + e^{-2t} \leq 2e^{at} + e^{-2t} := \psi_a(t)$$

avec ψ_a continue sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0, et négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ en ∞. Par conséquent, ψ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le (corollaire du) théorème de dérivation par domination, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et

$$\forall x < 0, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (e^{xt}\cos(xt) - e^{xt}\sin(xt) + e^{-2t}\sin(xt))\,\mathrm{d}t$$

4. Comme b et x sont réels, $b + ix \neq 0$ d'où

$$\int_0^{+\infty} e^{bt}e^{ixt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(b+ix)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(b+ix)t}}{b+ix}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{b+ix} = \frac{-b+ix}{b^2+x^2}$$

car $\left|e^{(b+ix)t}\right| = e^{bt}\left|e^{ixt}\right| = e^{bt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $b < 0$.

5. Soit $x < 0$, les 3 intégrales ci-dessous étant convergentes, il vient

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} e^{xt}\cos(xt)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{xt}\sin(xt)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sin(xt))\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{xt}e^{ixt}\,\mathrm{d}t\right) - \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{xt}e^{ixt}\,\mathrm{d}t\right) + \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-2t}e^{ixt}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{-x}{2x^2} - \frac{x}{2x^2} + \frac{x}{4+x^2} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{x}{4+x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = -\ln(|x|) + \dfrac{1}{2}\ln(4+x^2) + \lambda$. Or $F(-2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$ d'où $\lambda = -\dfrac{1}{2}\ln(2)$ ce qui achève le calcul de $F(x)$:

$$\forall x < 0, \quad F(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{2}\,|x|}\right)$$