

Examen de session 2 du jeudi 26 juin 2025

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on note $L(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de \mathbb{R}^n vers lui-même, et $S(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace de $L(\mathbb{R}^n)$ formé des endomorphismes symétriques pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

1. Donner un exemple de $f \in S(\mathbb{R}^n)$ tel que $\ker f$ contienne strictement $\{0\}$.
2. Donner un exemple de $f \in S(\mathbb{R}^n)$ tel que $\text{Im } f = \mathbb{R}^n$.
3. Déterminer la dimension de $S(\mathbb{R}^n)$ (on demande ici de reprouver le résultat de cours).
4. Soit $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$.
 - (a) Justifier que le spectre de f n'est pas vide. Dans la suite, on se donne λ dans le spectre de f .
 - (b) Montrer que $\ker(f - \lambda \text{Id})$ est stable par g .
 - (c) En déduire par récurrence sur n que f et g sont diagonalisables dans une même base.

Exercice 2. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. On suppose

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0.$$

Déterminer u .

Exercice 3. Dans l'exercice, E désignera l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0; 1]; \mathbb{C})$. Pour $(f, g) \in E^2$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \overline{f(0)}g(0) + \int_0^1 \overline{f'(t)}g'(t) dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire hermitien sur E .
2. On note $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et on cherche à déterminer son orthogonal (pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$).
 - (a) Montrer que, pour toute fonction $g \in E$, il existe une fonction $f \in F$ telle que $f' = g'$.
 - (b) En déduire que F^\perp est égal à l'ensemble des fonctions constantes appartenant à E .
3. Les sous-espaces F et F^\perp sont-ils supplémentaires dans E ?
4. Déterminer

$$\inf \left\{ |f(0) - 1|^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \mid f \in F \right\}.$$

Exercice 4. On se place dans \mathbb{R}^2 munit de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de la norme associée $\| \cdot \|$ et de sa base canonique $\{e_1, e_2\}$. On considère $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées

$$u_1 = (a_1, b_1), \quad u_2 = (a_2, b_2) \quad \text{et} \quad u_3 = (a_3, b_3).$$

On suppose que, pour tous $i, j \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ avec $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = -1$.

1. Donnez un exemple d'une telle famille $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Dans la suite des questions, on revient au cas général d'une famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ vérifiant les conditions données, on ne travaille pas avec l'exemple de la question 1. On pose, pour tout $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$,

$$p_i = \frac{1}{1 + \|u_i\|^2}.$$

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & \sqrt{p_1} a_1 & \sqrt{p_1} b_1 \\ \sqrt{p_2} & \sqrt{p_2} a_2 & \sqrt{p_2} b_2 \\ \sqrt{p_3} & \sqrt{p_3} a_3 & \sqrt{p_3} b_3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner 5 caractérisations équivalentes du fait que M est une matrice orthogonale, dont une faisant intervenir les colonnes ou les lignes de la matrice, une faisant intervenir l'endomorphisme u de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à M , et une faisant intervenir une notion de matrice de passage.
3. Calculer $A^t A$. Que peut-on en déduire sur la matrice A ?
4. En déduire la valeur de ${}^t A A$.
5. En déduire que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 p_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^3 p_i u_i &= 0_{\mathbb{R}^2} \\ \left(\sum_{i=1}^3 p_i \langle u_i, e_k \rangle \langle u_i, e_l \rangle \right)_{k,l=1,2} &= I_2. \end{aligned}$$

Correction de l'examen de session 2 d'algèbre iv du 26 juin 2025