**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre de printemps 2023-2024

Analyse IV Durée: 1 heure 30

---

**Examen de session 2 du vendredi 27 juin 2024**

---

*Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.*

*Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.*

**Question de cours :** Soient $E$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner 3 caractérisations équivalentes de l'assertion "$u$ est un endomorphisme orthogonal de $E$", dont une utilisant l'adjoint, une utilisant un produit scalaire ou une norme, et une utilisant une base orthonormée.

**Exercice 1.** Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension au moins 3. Soient $a, b \in E$ deux vecteurs unitaires orthogonaux. On définit $f : E \to E$ par $f(x) = \langle a, x\rangle b + \langle b, x\rangle a$.

1. Montrer que $f$ est auto-adjoint.
2. Justifier que $f$ est diagonalisable.
3. Calculer $f(a)$, $f(b)$ ainsi que $f(x)$ pour tout $x \in (\mathrm{Vect}\{a, b\})^{\perp}$.
4. En déduire les valeurs propres de $f$ et les espaces propres associés.

**Exercice 2.** Soit $A$ la matrice réelle suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Justifier que $A$ est diagonalisable. Déterminer une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ telles que $P^{-1}AP = D$.

**Exercice 3.**

1. (a) Peut-on trouver une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in ]0; \pi[, \quad -x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin(nx)?$$

   (b) Peut-on trouver une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in [0; \pi], \quad -x^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)?$$

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $2\pi$-périodique, impaire, définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in ]-\pi; 0]$.
   (a) Représenter le graphe de $f$.
   (b) Déterminer la série de Fourier de $f$ en formulation trigonométrique.
   (c) Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^p(4 - \pi^2(2p+1)^2)}{\pi(2p+1)^3}$.

**Exercice 4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on munit de son produit scalaire usuel donné par

$$\forall X, Y \in E, \quad \langle X, Y \rangle = {}^tXY$$

et on note $\| \ \|$ la norme euclidienne associée. Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in E$ fixés.

1. (a) Interprétez $\inf\{||Ax - b|| \,;\, x \in E\}$ comme la distance de $b$ à un sous-espace de $E$ que l'on précisera.

   (b) Montrez qu'il s'agit d'un minimum et précisez quels $x$ réalisent ce minimum.

2. (a) Montrez que $E = \mathrm{Ker}\,({}^tA\,A) \oplus \mathrm{Im}\,({}^tA\,A)$.

   (b) Montrez que $\mathrm{Ker}\,({}^tA\,A) = \mathrm{Ker}\,(A)$.

   (c) En déduire que $\mathrm{Im}\,({}^tA\,A) = \mathrm{Im}\,({}^tA)$.

   (d) En déduire que l'équation ${}^tA\,A\,x = {}^tA\,b$ admet toujours au moins une solution.

3. (a) Soit $x$ un élément de $E$ qui réalise le minimum de la question 1. En remarquant que

   $$||Ax - b|| \leq ||A(x + t\,z) - b||$$

   pour tout $z \in E$, tout $t \in \mathbb{R}$, montrez que ${}^tA\,A\,x = {}^tA\,b$.

   (b) Montrez la réciproque : si ${}^tA\,A\,x = {}^tA\,b$ alors $x$ est un élément de $E$ qui réalise le minimum de la question 1.

# Correction de l'examen de session 2 d'algèbre iv du 27 juin 2024

**Correction de l'exercice 1**

1. Soient $x, y \in E$. On développe

$$\begin{aligned} \langle f(x), y\rangle &= \langle \langle a, x\rangle b + \langle b, x\rangle a, y\rangle \\ &= \langle a, x\rangle\langle b, y\rangle + \langle b, x\rangle\langle a, y\rangle. \end{aligned}$$

   On voit alors que $\langle x, f(y)\rangle = \langle f(y), x\rangle = \langle a, y\rangle\langle b, x\rangle + \langle b, y\rangle\langle a, x\rangle = \langle f(x), y\rangle$.

2. C'est une conséquence du théorème spectral.

3. On a : $f(a) = \langle a, a\rangle b + \langle b, a\rangle a = b$ car $a$ est unitaire et $a \perp b$. De même $f(b) = a$. Pour $x$ orthogonal à $a$ et $b$, on otient $f(x) = 0$.

4. Comme $E$ est de dimension finie, on a $E = \mathrm{Vect}\{a, b\} \oplus (\mathrm{Vect}\{a, b\})^\perp$. Les calculs précédents montrent que $(\mathrm{Vect}\{a, b\})^\perp \subseteq E_0$ (l'espace propre associé à la valeur propre 0). De plus, la dimension de $\mathrm{Vect}\{a, b\}$ est 2 car $a$ et $b$ sont non colinéaires (car non nuls et orthogonaux) donc le sev $(\mathrm{Vect}\{a, b\})^\perp$ est de dimension $n-2$ et comme $n \geq 3$, $n-2 \geq 1$. Ainsi $E_0$ est de dimension au moins $n-2$ et 0 est bien une valeur propre de $f$. Nous allons voir que $E_0$ est en fait de dimension $n-2$.
   On a $f(a+b) = b + a = 1 \cdot (a+b)$ et $f(a-b) = b - a = -1 \cdot (a-b)$. Cela montre que 1 et $-1$ sont aussi des valeurs propres.
   Si on regarde les multiplicités (algébriques), on voit que 1 et $-1$ sont de multiplicité au moins 1 et 0 est de multiplicité au moins $n-2$ mais comme la somme ne peut dépasser $n$, on peut conclure que les multiplicités algébriques de 1 , $-1$ et 0 sont respectivement 1, 1 et $n-2$. $f$ étant diagonalisable, on a égalité entre les multiplicités algébriques et géométriques ce qui implique que les dimensions de $E_1$ et $E_{-1}$ sont 1 et la dimension de $E_0$ est $n-2$.
   En conclusion, le spectre de $f$ est $\{1, -1, 0\}$ est les espaces propres sont $E_1 = \mathrm{Vect}\{a+b\}$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}\{a-b\}$ et $E_0 = (\mathrm{Vect}\{a+b\})^\perp$.
   <u>Remarque :</u> une autre méthode serait de montrer (comme on l'a fait) que $\mathrm{Vect}\{a+b\}$ est de dimension $n-2$. Puis de construire une base formée de la concaténation de $a+b$, $a-b$ et d'une base de $\mathrm{Vect}\{a+b\}$. Ensuite, on considère la matrice de $f$ dans une telle base et on obtient la matrice diagonale formée de 1, $-1$ et de $n-2$ fois 0. Cela donne une base de vecteurs propres et donne aussi les valeurs propres et les espaces propres associés.

**Correction de l'exercice 2** La matrice $A$ est symétrique réelle donc par la version matricielle du théorème spectral, il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale réelle telle que $P^{-1}AP = D$. Le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A = (X-4)(X-1)^2$, la recherche des espaces propres donne

$$E_4(A) = \mathrm{Vect}\{u_1\} \text{ où } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_1(A) = \mathrm{Vect}\{u_2, u_3\} o u_2 = ($$

0192939293929392931 0192939293929392930 0192939293929392931 et $\mathrm{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .Toujours par le théorème spectral, on sait que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_4(A) \overset{\perp}{\oplus} E_1(A)$ où $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel. On cherche une base orthonormée de chacun des sous-espaces propres, que l'on concaténera pour avoir une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$. Posons

$$e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 =$$

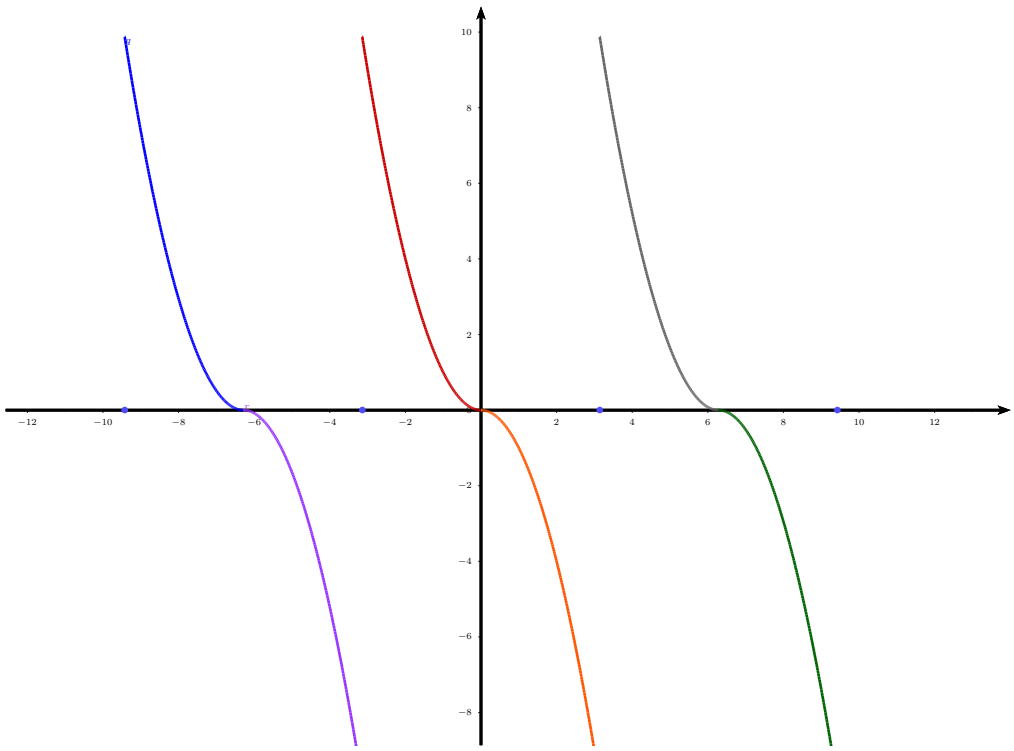
**Correction de l'exercice 3**

1. (a) Considérons la fonction $g$, impaire, $2\pi$-périodique, donnée par $g(x) = -x^2$ pour tout $x \in ]0;\pi[$. On a alors $g(x) = x^2$ pour tout $x \in ]-\pi;0[$ par imparité, et $g(0) = 0$. De plus, par $2\pi$-périodicité, $g(\pi) = g(\pi - 2\pi) = g(-\pi) = -g(\pi)$ donc $g(\pi) = 0$. Une telle fonction $g$ existe bien et est unique. Par ailleurs, la restriction de $g$ à $]0;\pi[$ est donnée par $x \longmapsto -x^2$, qui se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$ (par $x \longmapsto -x^2$), donc $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0;\pi]$, puis sur $[-\pi;\pi]$ par parité, et enfin sur $\mathbb{R}$ par $2\pi$-périodicité. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $g$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de $g$, noté $\widetilde{g}$. Or, $g$ est continue sur $]0;\pi[$, donc pour tout $x \in ]0;\pi[$, $\widetilde{g}(x) = g(x) = -x^2$, et $g$ est impaire, donc ses coefficients de Fourier trigonométriques vérifient $a_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\forall x \in ]0;\pi[, \quad -x^2 = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(g)\cos(nx) + b_n(g)\sin(nx)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin(nx)$$

en posant $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = b_n(g) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx) \in \mathbb{R}$. Donc il existe bien une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la condition voulue.

(b) Si une telle suite existait, on aurait en particulier $-\pi^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(n\pi) = 0$ ce qui serait contradictoire, donc on ne peut pas trouver une telle suite.




2. (a)

Remarquons que la fonction $f$ correspond en fait à la fonction $g$ étudiée dans la première question.

(b) La fonction $f$ étant impaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \text{ par parité de } x \longmapsto f(x)\sin(nx) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x^2\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{2x\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right) \text{ par intégration par parties} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \left[\frac{2x\sin(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{2\sin(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + 0 + \left[\frac{2\cos(nx)}{n^3}\right]_{-\pi}^{0}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, la série de Fourier de $f$ en formulation trigonométrique est

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n(f)T_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\right)T_n \text{ où } \forall n \in N^*, \quad T_n : x \longmapsto \sin(nx).$$

(c) On a vu dans la première question que la somme de la série de Fourier de $f$ est égale à la régularisée de $f$, qui vaut $f$ sur $]-\pi;0[$. En évaluant celle-ci en $x = -\frac{\pi}{2}$ par exemple, et en utilisant le fait que

$$\sin\left(-n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{p+1} & \text{si } n = 2p+1 \text{avec } p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\right) \\
\iff\quad &\frac{\pi^2}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi^2}{2p+1} + \frac{4}{(2p+1)^3}\right)(-1)^{p+1} \\
\iff\quad &\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^p}{\pi}\frac{4-\pi^2(2p+1)^2}{(2p+1)^3} = -\frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 4** 1) L'ensemble est non vide minoré, donc l'inf existe. Soit $x$ le projeté orthogonal de $b$ sur $E$, alors pour tout $y \in E$ on a

$$||y-b||^2 = ||(y-x)+(x-b)||^2 = ||(y-x)||^2 + ||(x-b)||^2 \geq ||(x-b)||^2 .$$

Donc $x$ est bien minimal dans $E$ pour $||(x-b)||$. De plus si $y \neq x$ alors $||(y-x)|| > 0$ et $||y-b||^2 > ||(x-b)||^2$. Ce qui prouve l'unicité.

2) a) Cela revient à la même question que 1) pour $E = \mathrm{Im}A$. Donc ce min est réalisé par tous les $x$ tels que $Ax = \Pi_{\mathrm{Im}A}(b)$.

2) b) On a deux solutions $x, x'$ si et seulement si $Ax = Ax'$, c'est-à-dire $x - x' \in \mathrm{Ker}A$.

3 a) ${}^tA\,A$ est symétrique réelle, donc diagonalisable. L'espace $\mathrm{Ker}\,({}^tA\,A)$ est son espace propre $E_0$, alors que $\mathrm{Im}\,({}^tA\,A)$ est la somme de ses autres espaces propres. D'où le résultat.

3) b) On a $\mathrm{Ker} A \subset \mathrm{Ker}\,({}^tA\,A)$ trivialement. Inversement, si $y \in \mathrm{Ker}\,({}^tA\,A)$, alors $< y\,,\,{}^tA\,A\,y >= 0$ et donc $||A\,y||^2 = 0$, i.e. $y \in \mathrm{Ker} A$.

3) c) On sait que $\mathrm{Im}\,({}^tA) = (\mathrm{Ker} A)^{\perp}$. Donc on a la décomposition

$$\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker} A \oplus \mathrm{Im}\,({}^tA) = \mathrm{Ker}\,({}^tA\,A) \oplus \mathrm{Im}\,({}^tA)$$

en somme directe orthogonale. On remarque maintenant que la décomposition $\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker}\,({}^tA\,A) \oplus \mathrm{Im}\,({}^tA\,A)$ de la question 3) a) était aussi une somme directe orthogonale car les espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux. On a donc $\mathrm{Im}\,({}^tA\,A) = \mathrm{Im}\,({}^tA)$.

3) d) ${}^tA\,b$ appartient à $\mathrm{Im}\,({}^tA)$ donc à $\mathrm{Im}\,({}^tA\,A)$. Il existe ainsi $x$ tel que ${}^tA\,A\,x = {}^tA\,b$.

4) a)

$$||Ax - b||^2 \leq ||A(x + t\,z) - b||^2 = ||Ax - b||^2 + 2t\ < Ax - b\,,\,A\,z > +t^2||A\,z||^2\,.$$

Ou encore

$$2t\ < Ax - b\,,\,Az > +t^2||A\,z||^2 \geq 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela n'est possible que si $< Ax - b\,,\,A\,z >= 0$, et ce pour tout $z$. On a donc $< {}^tA\,Ax - {}^tAb\,,\,z >= 0$ pour tout $z$, donc ${}^tA\,Ax - {}^tAb = 0$.

4) b) L'argument de 3) a) se remonte facilement : si ${}^tA\,Ax - {}^tAb = 0$, alors $< {}^tA\,Ax - {}^tAb\,,\,z >= 0$ pour tout $z$. Donc

$$2t\ < Ax - b\,,\,Az > +t^2||A\,z||^2 \geq 0$$

pour tout $t$ et $||Ax - b||^2 \leq ||A(x + t\,z) - b||^2$ pour tous $t, z$. On conclut en remarquant que l'ensemble des $x + t\,z$ c'est l'espace tout entier.