Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2022-2023

Algèbre IV — Durée: 1 heure 30

Session 2 du mercredi 28 juin 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Soit E l'ensemble des applications $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On pose, pour $f, g \in E$, $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
3. On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : t \geq 0 \mapsto t^k$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k \in E$.
   (b) Calculer, pour tous $k, p \in \mathbb{N}$, $\langle f_k, f_p\rangle$.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire suivant :

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \langle x, y\rangle = 4x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

1. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ (pour ce produit scalaire). On considère dans la suite que $\mathbb{R}^2$ est orienté par $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une mesure θ de l'angle orienté entre le vecteur $u = (0, 1)$ et le vecteur $v = (-1, 1)$.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien.

1. Soient F un sous-espace vectoriel de E et soit p la projection orthogonale sur F. Montrer que p est autoadjoint. *Indication : on pourra utiliser la décomposition d'un élément de E selon la somme directe $E = F \oplus F^\perp$.*
2. Soient maintenant deux projections orthogonales p et q sur F et G respectivement.
   (a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est autoadjoint puis diagonalisable.
   (b) Montrer que $(F + G^\perp)^\perp = G \cap (F^\perp)$.
   (c) Justifier que F est stable par $p \circ q \circ p$. Montrer qu'une base de F constituée de vecteurs propres de $p \circ q \circ p$ est également formée de vecteurs propres de $p \circ q$.
   (d) Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F choisie comme dans la question précédente. On la complète pour obtenir une base $\mathcal{B}_1$ de $F + G^\perp$. Ensuite on considère une base $\mathcal{B}_2$ de $G \cap (F^\perp)$ et on note $\mathcal{B}$ la famille obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
   Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de E et montrer que c'est une base de vecteurs propres de $p \circ q$.

Exercice 4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire qui vérifie :

$$f(x) = 1 \text{ pour } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = 0 \text{ pour } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi.$$

1. Montrer que $f(0) = 0$ et que $f(\pi) = 0$.
2. Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction f (que l'on notera $a_n(f)$ et $b_n(f)$).
3. Dans cette question, on note :

$$S = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

   (a) Déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} [b_{4k}(f)]^2$.

   (b) Exprimer en fonction de S le réel $\sum_{m=0}^{+\infty} [b_{2m+1}(f)]^2$.

   (c) Exprimer en fonction de S le réel $\sum_{k=0}^{+\infty} [b_{4k+2}(f)]^2$.

   (d) Déduire la valeur de S des calculs qui précèdent.

4. (a) Montrer que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction qu'on notera $\tilde{f}$.

   (b) Déterminer l'ensemble $\tilde{f}(\mathbb{R})$.

Correction de la session 2 d'algèbre iv du 28 juin 2023