

**Examen final du vendredi 9 mai 2025**

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème donné, sur environ 34 points pour tenir compte de la longueur du sujet, est uniquement **indicatif**.

**Exercice 1.** ( $\simeq 3$  points) On considère l'équation différentielle  $(E) : x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(x)$  d'inconnue  $y : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable. On note  $(E_0)$  l'équation homogène associée à  $(E)$ .

1. Déterminer les solutions de  $(E_0)$  de la forme  $x \mapsto x^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Donner l'ensemble des solutions de  $(E_0)$ .
3. Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ .

Indication : une primitive de  $x \mapsto \ln(x)$  est  $x \mapsto x \ln(x) - x$  et une primitive de  $x \mapsto x \ln(x)$  est  $x \mapsto \frac{x^2}{4}(2 \ln(x) - 1)$ .

**Exercice 2.** ( $\simeq 7.5$  points) Soit  $E = \mathcal{C}([0; 1]; \mathbb{R})$ . Pour  $\varphi \in E$ , à valeurs positives, ne s'annulant qu'au plus en un point de  $[0; 1]$ , on définit :

$$\forall f \in E, \quad N_\varphi(f) = \int_0^1 |f(t)| \varphi(t) dt.$$

1. Montrer que  $N_\varphi$  est une norme sur  $E$ .
2. Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  appartenant à  $E$ , à valeurs strictement positives.
  - (a) Justifier que la fonction  $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$  est bornée sur  $[0; 1]$ .
  - (b) Montrer que  $N_{\varphi_1}$  et  $N_{\varphi_2}$  sont équivalentes.
3. On suppose désormais que  $\varphi_1 : t \mapsto t$  et  $\varphi_2 : t \mapsto t^2$  et on notera dans la suite pour simplifier  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) à la place de  $N_{\varphi_1}$  (resp.  $N_{\varphi_2}$ ).
  - (a) Déterminer un réel  $a \in \mathbb{R}_+^*$  tel que, pour tout  $f \in E$ ,  $N_2(f) \leq aN_1(f)$ .
  - (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $h_n$  de  $E$  suivante par  $h_n : t \mapsto (n+1)^2(1-t)^n$ . Montrer que la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge pour la norme  $N_2$  vers une fonction  $h$  que l'on précisera.
  - (c) Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas équivalentes.
4. On pose  $F = \{f \in E \mid f \text{ ne s'annule qu'un nombre fini de fois}\}$ . L'ensemble  $F$  est-il fermé pour  $N_2$  ?

**Exercice 3.** ( $\simeq 7$  points) Pour cet exercice, on donne la valeur de l'intégrale suivante :  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Pour  $x$  réel, on pose  $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(t^2 + \frac{x^2}{t^2})} dt$ .

1. Soit  $a > 0$ . Montrer que la fonction  $\psi_a : t \mapsto \frac{1}{t^2} e^{-\frac{a^2}{t^2}}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrer que la fonction  $F$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Étudier la parité de la fonction  $F$ .
4. Montrer que la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et exprimer  $F'(x)$  à l'aide d'une intégrale pour  $x > 0$ .
5. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $F'(x) = -2F(x)$ .
6. En déduire une expression explicite de  $F(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  à l'aide de fonctions usuelles (sans intégrale).

**Exercice 4.** ( $\simeq 11$  points) On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + 3y^2)e^{-y} & \text{si } x \neq -y, \\ x^2 e^{-y} & \text{si } x = -y. \end{cases}$$

On note  $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -y\}$  et  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$ .
3. Montrer qu'il existe un unique point de  $D$  en lequel  $f$  est continue et le déterminer.
4. Montrer que  $f$  admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en  $(0, 0)$  et les expliciter.
5. Déterminer l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  en lesquels la fonction  $f$  est différentiable, et préciser la différentielle de  $f$  en ces points.
6. Déterminer les extrema locaux de  $f$  sur  $\mathcal{U}$  et préciser leur nature.
7. La fonction  $f$  admet-elle un minimum global ? un maximum global ?
8. Soient  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  et  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = g(f(x, y) + x, yf(x, y)).$$

Justifier la différentiabilité de  $h$  en  $(1, 0)$  et calculer les dérivées partielles premières de  $h$  en  $(1, 0)$  en fonction de celles de  $f$  et de  $g$ .

**Exercice 5.** ( $\simeq 6$  points) Soit  $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = 5I_3\}$ .

1. Justifier la continuité des applications

$$\begin{array}{ccc} u : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

sur leurs domaines de définition respectifs.

2. Montrer que  $\mathcal{A}$  est un fermé de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
3. Montrer que  $\mathcal{A}$  est un compact de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
4. (a) Soient  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $A \in \mathcal{A}$  et  $r > 0$ . Déterminer  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  pour que les matrices  $A \pm \alpha J$ , où  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , appartiennent à la boule ouverte de centre  $A$  et de rayon  $r$  pour la norme  $\|\cdot\|$ .
- (b) Déterminer l'intérieur de  $\mathcal{A}$ .

# Correction de l'examen terminal d'analyse iv du 9 mai 2025

## Correction de l'exercice 1

1. L'équation homogène associée à  $(E)$  est  $(E_0) : x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $y_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $y_\alpha(x) = x^\alpha$  pour tout  $x > 0$ . La fonction  $y_\alpha$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et on a :

$$\begin{aligned} y_\alpha \text{ est solution de } (E_0) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* &\iff \forall x > 0, \quad x^2 \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + 4x\alpha x^{\alpha-1} + 2x^\alpha = 0 \\ &\iff \forall x > 0, \quad (\alpha(\alpha - 1) + 4\alpha + 2)x^\alpha = 0 \\ &\iff \forall x > 0, \quad (\alpha^2 + 3\alpha + 2)x^\alpha = 0 \\ &\iff \forall x > 0, \quad (\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0 \text{ car } x^\alpha \neq 0 \\ &\iff \alpha \in \{-1; -2\}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  de la forme  $y_\alpha$  est

$$\{\varphi; \psi\} \text{ où } \varphi : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ et } \psi : x \mapsto \frac{1}{x^2}.$$

2. L'équation  $(E_0)$  est une équation différentielle homogène linéaire du second ordre, non normalisée mais normalisable sur  $\mathbb{R}_+^*$  (car  $x^\alpha \neq 0$  pour tout  $x > 0$ ) en  $y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$  avec  $x \mapsto \frac{4}{x}$  et  $x \mapsto \frac{2}{x^2}$  continues sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent, l'ensemble  $S_0$  des solutions de  $(E_0)$  est un espace vectoriel de dimension 2. Par la question précédente, les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux solutions de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On peut montrer avec la technique usuelle qu'elles forment une famille libre ou utiliser le cours sur leur wronskien, noté  $w$  :

$$\forall x > 0, \quad w(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^4} \neq 0$$

ce qui permet de démontrer que  $(\varphi, \psi)$  est un système fondamental de solutions de  $(E_0)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi,

$$S_0 = \text{Vect}\{\varphi, \psi\} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda \frac{1}{x} + \mu \frac{1}{x^2} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Il nous reste à déterminer une solution particulière de  $(E)$  pour avoir l'ensemble de ses solutions  $S$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour cela, on utilise la méthode de variations des constantes, on n'oubliant pas de normaliser  $(E)$  dans un premier temps afin de pouvoir utiliser les résultats de cours. Soient  $\lambda, \mu : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables, et  $y : x \mapsto \lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)$ . On sait que pour que  $y$  soit solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , il suffit que  $\lambda$  et  $\mu$  vérifient le système suivant :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad &\begin{cases} \lambda'(x)\varphi(x) + \mu'(x)\psi(x) = 0 \\ \lambda'(x)\varphi'(x) + \mu'(x)\psi'(x) = \frac{1}{x^2} \ln(x) \end{cases} \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad &\begin{cases} \lambda'(x)\frac{1}{x} + \mu'(x)\frac{1}{x^2} = 0 \\ -\lambda'(x)\frac{1}{x^2} - \mu'(x)\frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^2} \ln(x) \end{cases} \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad &\begin{cases} \lambda'(x) + \mu'(x)\frac{1}{x} = 0 \\ -\lambda'(x) - \mu'(x)\frac{2}{x} = \ln(x) \end{cases} \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad &\begin{cases} \lambda'(x) = \ln(x) \\ \mu'(x) = -x \ln(x) \end{cases} \end{aligned}$$

Par les primitives données dans l'énoncé, il suffit de prendre  $\lambda : x \mapsto x \ln(x) - x$  et  $\mu : x \mapsto -\frac{x^2}{4}(2 \ln(x) - 1)$ , ce qui montre que la fonction

$$y : x \mapsto (x \ln(x) - x)\frac{1}{x} - \frac{x^2}{4}(2 \ln(x) - 1)\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{3}{4}$$

est solution particulière de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . L'ensemble des solutions de  $(E)$  est donc

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda \frac{1}{x} + \mu \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{3}{4} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

## Correction de l'exercice 2

- Soit  $f \in E$ , tout d'abord, l'application  $t \mapsto |f(t)| \varphi(t)$  est continue sur le segment  $[0; 1]$ , donc intégrable sur ce segment, ce qui justifie la convergence de l'intégrale  $\int_0^1 |f(t)| \varphi(t) dt$ . De plus, la fonction intégrée étant à valeurs positive, la positivité de l'intégrale entraîne  $N_\varphi(f) \geq 0$ . Ainsi, on a bien  $N_\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ .
  - Soient  $f \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , par linéarité de l'intégrale,

$$N_\varphi(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda| |f(t)| \varphi(t) dt = |\lambda| N_\varphi(f).$$

- Soit  $f \in E$ , par continuité et positivité de la fonction  $t \mapsto |f(t)| \varphi(t)$  sur  $[0; 1]$ , il vient, en notant  $a$  l'unique point potentiel de  $[0; 1]$  où  $\varphi$  s'annule :

$$\begin{aligned} N(f) = \int_0^1 |f(t)| \varphi(t) dt = 0 &\iff \forall t \in [0; 1], \quad |f(t)| \varphi(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in [0; 1] \setminus \{a\}, \quad |f(t)| = 0 \text{ (car } \varphi(t) \neq 0) \\ &\iff \forall t \in [0; 1] \setminus \{a\}, \quad f(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in [0; 1], \quad f(t) = 0 \text{ par continuité de } f \text{ en } a \\ &\iff f = 0_E \end{aligned}$$

- Soient  $f, g \in E$ , alors pour tout  $t \in [0; 1]$ , par inégalité triangulaire,  $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$  d'où par croissance de l'intégrale :

$$N_\varphi(f + g) = \int_0^1 |f(t) + g(t)| \varphi(t) dt \leq \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|) \varphi(t) dt = N_\varphi(f) + N_\varphi(g)$$

ce qui achève de démontrer que  $N_\varphi$  est une norme sur  $E$ .

- (a) Comme  $\varphi_2$  ne s'annule pas sur  $[0; 1]$ , la fonction  $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$  est continue sur le segment  $[0; 1]$ , donc bornée sur ce segment par le théorème des bornes atteintes. Il existe donc  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que,  $\forall t \in [0; 1]$ ,  $0 \leq \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} \leq M$ .
  - (b) Soit  $f \in E$ , alors

$$N_{\varphi_1}(f) = \int_0^1 |f(t)| \varphi_1(t) dt = \int_0^1 |f(t)| \underbrace{\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}}_{\leq M} \varphi_2(t) dt \leq \int_0^1 |f(t)| M \varphi_2(t) dt = M N_{\varphi_2}(f).$$

On procède de même pour montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{R}_+^*$  majorant  $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$  ce qui entraîne  $N_{\varphi_2}(f) \leq m N_{\varphi_1}(f)$ . Ainsi, on a montré qu'il existe  $M$  et  $m$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  tels que

$$\forall f \in E, \quad \frac{1}{m} N_{\varphi_2}(f) \leq N_{\varphi_1}(f) \leq M N_{\varphi_2}(f)$$

ce qui prouve que  $N_{\varphi_1}$  et  $N_{\varphi_2}$  sont équivalentes.

- (a) Soit  $f \in E$ . Pour tout  $t \in [0; 1]$ ,  $t^2 \leq t$ , d'où  $|f(t)| t^2 \leq |f(t)| t$  par positivité de  $|f(t)|$  ce qui entraîne

$$N_2(f) = \int_0^1 |f(t)| t^2 dt \leq \int_0^1 |f(t)| t dt = N_1(f)$$

Ainsi, le réel  $a = 1$  convient.

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $h_n$  appartient à  $E$  et

$$\begin{aligned}
 N_2(h_n) &= \int_0^1 |(n+1)^2(1-t)^n| t^2 dt \\
 &= \int_0^1 (n+1)^2 t^2 (1-t)^n dt \text{ car } \forall t \in [0; 1], (1-t)^n \geq 0 \\
 &= \left[ -(n+1)t^2(1-t)^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 2t(n+1)(1-t)^{n+1} dt \text{ par intégration par parties} \\
 &= \left[ -2t \frac{n+1}{n+2} (1-t)^{n+2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2(n+1)}{n+2} (1-t)^{n+2} dt \\
 &= \left[ -\frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)} (1-t)^{n+3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)}
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $N_2(h_n - 0_E) = N_2(h_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  ce qui démontre que la suite  $(h_n)_n$  converge vers la fonction  $h = 0_E$  pour la norme  $N_2$ .

(c) Étudions la convergence de la suite  $(h_n)_n$  pour la norme  $N_1$  vers la fonction  $0_E$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
 N_1(h_n) &= \int_0^1 (n+1)^2 (1-t)^n t dt \\
 &= \left[ -(n+1)t(1-t)^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)(1-t)^{n+1} dt \\
 &= \left[ -\frac{n+1}{n+2} (1-t)^{n+2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{n+1}{n+2}
 \end{aligned}$$

qui ne tend pas vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, la suite  $(h_n)_n$  ne converge pas vers  $0_E$  pour la norme  $N_1$ , donc les normes  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas équivalentes (puisque la notion de convergence d'une suite vectorielle est invariante par passage à une norme équivalente).

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $h_n$  ne s'annule qu'en  $t = 1$ , donc  $h_n$  appartient à  $F$ . Ainsi, la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $F$ , qui converge vers  $h = 0_E$  pour la norme  $N_2$ , avec  $h \notin F$  puisque la fonction nulle s'annule une infinité de fois sur  $[0; 1]$ . Par négation de la caractérisation séquentielle des fermés, l'ensemble  $F$  n'est pas un fermé pour  $N_2$ .

### Correction de l'exercice 3

1. La fonction  $\psi_a$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc intégrable sur tout segment inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, lorsque  $t \rightarrow 0$ ,  $\frac{a^2}{t^2}$  tend vers  $+\infty$ , donc par croissances comparées,

$$\psi_a(t) = \frac{1}{a^2} \frac{a^2}{t^2} e^{-\frac{a^2}{t^2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

La fonction  $\psi_a$  est donc prolongeable par continuité en 0, et ainsi, elle est intégrable sur  $[0; b]$  pour tout  $b > 0$ . De plus, pour tout  $t > 0$ ,  $0 \leq \psi_a(t) \leq \frac{1}{t^2}$  car  $e^{-u} \leq 1$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^+$ . La fonction de Riemann  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  étant intégrable sur  $[b; +\infty[$  puisque  $2 > 1$ , on en déduit par comparaison de fonctions positives que  $\psi_a$  est aussi intégrable sur  $[b; +\infty[$  et donc a fortiori sur  $\mathbb{R}$ .

2. Posons  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x, t) = e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)}$  de sorte que  $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ .

- On peut décomposer  $f$  sous la forme  $f = \exp \circ \left( - \left( q^2 + \frac{p^2}{q^2} \right) \right)$  où

$$p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (x, t) \longmapsto x \quad \quad \quad (x, t) \longmapsto t$$

sont deux fonctions polynomiales donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec  $q$  ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , et  $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Par opérations, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  donc en particulier continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .

- Soit  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ ,

$$|f(x, t)| = e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)} = e^{-t^2} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{t^2}}}_{\leq 1} \leq e^{-t^2} := \varphi(t) \quad (\text{indépendant de } x)$$

où l'on peut définir  $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  par  $\varphi(t) = e^{-t^2}$  pour tout  $t \geq 0$ . La fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  (donc intégrable sur tout segment inclus dans  $\mathbb{R}^+$ ) et négligeable devant  $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$  puisque par croissances comparées,

$$\frac{\varphi(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^2 e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi,  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^+$ .

Par le théorème de continuité par domination pour les intégrales à paramètres, on en conclut que la fonction  $F$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

3. Le domaine de définition  $\mathbb{R}$  de  $F$  est symétrique par rapport à 0. Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors

$$F(-x) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(t^2 + \frac{(-x)^2}{t^2}\right)} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)} dt = F(x)$$

donc la fonction  $F$  est paire.

4. On a déjà vérifié les deux premiers points du théorème de dérivation par domination dans la question 2.

- La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , donc en particulier de classe  $\mathcal{C}^1$ , sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent, elle admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable notée  $\frac{\partial f}{\partial x}$  qui est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ . De plus,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x}{t^2} e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)}.$$

- Soit  $[a; b]$  un segment inclus dans  $\mathbb{R}_+^*$  (alors  $a > 0$ ). Soit  $(x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+^*$ , alors  $a^2 \leq x^2$  par croissance de la fonction carrée sur  $\mathbb{R}^+$  et donc par décroissance de la fonction  $u \longmapsto e^{-u}$  sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2x}{t^2} e^{-t^2} e^{-\frac{x^2}{t^2}} \leq \frac{2x}{t^2} e^{-t^2} e^{-\frac{a^2}{t^2}} \leq \frac{2b}{t^2} e^{-\left(t^2 + \frac{a^2}{t^2}\right)} = 2b\psi_a(t) \quad (\text{indépendant de } x)$$

Par la question 1, la fonction  $t \longmapsto 2b\psi_a(t)$  est continue (donc c.p.m.) sur  $\mathbb{R}_+^*$  et intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par le (corollaire du) théorème de dérivabilité par domination, cela entraîne que la fonction  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $x > 0$ ,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{2x}{t^2} e^{-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)} dt.$$

5. Soit  $x > 0$ , on effectue le changement de variable  $u = \frac{x}{t}$  ce qui entraîne  $du = -\frac{x}{t^2} dt$ . De plus, quand  $t \rightarrow 0^+$ ,  $u \rightarrow +\infty$  et quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $u \rightarrow 0$ , d'où

$$F'(x) = 2 \int_{+\infty}^0 e^{-\left(\frac{x^2}{u^2} + u^2\right)} du = -2 \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{u^2} + u^2\right)} du = -2F(x).$$

6. On vient de démontrer que  $F$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ( $E$ ) :  $y'(x) + 2y(x) = 0$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $x > 0$ ,  $F(x) = \lambda e^{-2x}$ . Par continuité de  $F$  et de  $x \mapsto e^{-2x}$  en 0, l'égalité précédente est aussi vraie en 0, ce qui donne  $\lambda = F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  ce qui entraîne  $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ . Par parité de  $F$ , on a alors pour tout  $x < 0$ ,  $F(x) = F(-x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{+2x}$ .

#### Correction de l'exercice 4

1. On peut écrire

$$\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{R}^*\} = g^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

où  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est polynomiale, donc continue sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ .  
 $(x, y) \mapsto x + y$

Puisque  $\mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ ,  $\mathbb{R}^*$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  en tant qu'union de deux ouverts de  $\mathbb{R}$ , on en conclut que  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. La restriction de  $f$  à  $\mathcal{U}$  est donnée par  $(x, y) \mapsto (x^2 + 3y^2)e^{-y}$ . Ainsi, si l'on note

$$\begin{array}{ccc} p_1 : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{et} & p_2 : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x & & (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

on peut décomposer  $f|_{\mathcal{U}} = (p_1^2 + 3p_2^2) \times \exp \circ (-p_2)$ . Les fonctions  $p_1$  et  $p_2$  sont linéaires, donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et la fonction  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Par opérations,  $f|_{\mathcal{U}}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$ . Comme  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , on en déduit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{U}$ .

3. Soit  $(a, -a) \in D$ , par définition,  $f(a, -a) = a^2 e^a$ . Soit  $(x, y) \in \mathcal{U}$ , alors par continuité des fonctions polynomiales sur  $\mathbb{R}^2$ ,

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-y} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (a, -a)} (a^2 + 3(-a)^2)e^{-(-a)} = 4a^2 e^a.$$

On dispose de l'équivalence :  $4a^2 e^a = a^2 e^a \iff 3a^2 e^a = 0 \iff a = 0$ . On distingue alors deux cas.

- Si  $a \neq 0$ , alors en posant, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n = \left(a + \frac{1}{n}, -a\right)$ , on a  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (a, -a)$  (par caractérisation de la convergence dans un espace de dimension finie, chaque suite coordonnée est convergente par exemple) et  $X_n \in \mathcal{U}$  car  $\frac{1}{n} \neq 0$ . Par conséquent,  $f(X_n) = \left(\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 + 3a^2\right) e^{-a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4a^2 e^{-a} \neq f(a, -a)$  donc la fonction  $f$  n'est pas continue en  $(a, -a)$ .
- Si  $a = 0$ , alors  $f(a, -a) = 0$ . Soit  $(x, y) \in \mathcal{U}$ , alors en notant  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^2$ , on a  $-|y| \leq y \leq |y|$  et  $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$  d'où par croissance de  $\exp$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$0 \leq |f(x, y)| = (x^2 + 3y^2)e^{-y} \leq (3x^2 + 3y^2)e^{\|(x, y)\|} \leq 3\|(x, y)\|^2 e^{\|(x, y)\|}$$

De même, si  $(x, y) \in D$ , on a

$$0 \leq |f(x, y)| = x^2 e^{-y} \leq (x^2 + y^2)e^{\|(x, y)\|} \leq 3(x^2 + y^2)e^{\|(x, y)\|} \leq 3\|(x, y)\|^2 e^{\|(x, y)\|}$$

Ainsi, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a montré que  $0 \leq |f(x, y)| \leq 3\|(x, y)\|^2 e^{\|(x, y)\|} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$ , ce qui démontre par encadrement que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$  et prouve la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ .

Il existe donc bien un unique point de  $D$ , à savoir  $(0, 0)$ , en lequel  $f$  est continue.

4. Soit  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $t \in \mathbb{R}^*$ , alors

$$\frac{1}{t}(f((0,0) + tv) - f(0,0)) = \frac{1}{t}f(ta, tb).$$

- Si  $(a, b) \in \mathcal{U}$ , alors  $(ta, tb) \in \mathcal{U}$  aussi et ainsi

$$\frac{1}{t}f(ta, tb) = \frac{1}{t}(t^2a^2 + 3t^2b^2)e^{-bt} = t(a^2 + 3b^2)e^{-tb} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

ce qui prouve que la dérivée directionnelle  $D_v f(0,0)$  de  $f$  en  $(0,0)$  selon  $v$  existe et vaut 0.

- Si  $(a, b) \notin \mathcal{U}$ , alors  $(ta, tb) \notin \mathcal{U}$  et ainsi

$$\frac{1}{t}f(ta, tb) = \frac{1}{t}(t^2a^2)e^{-bt} = ta^2e^{-tb} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

ce qui démontre que  $D_v f(0,0)$  de  $f$  en  $(0,0)$  selon  $v$  existe et vaut 0.

5. • On a vu que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , donc en particulier de classe  $\mathcal{C}^1$ , sur  $\mathcal{U}$ . Par suite, elle est différentiable en tout point de  $\mathcal{U}$  et pour  $(x, y) \in \mathcal{U}$ ,

$$\begin{aligned} df(x, y) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (h, k) &\longmapsto h\partial_1 f(x, y) + k\partial_2(x, y) = h2xe^{-y} + k(6y - x^2 - 3y^2)e^{-y}. \end{aligned}$$

- Si  $(a, -a) \in D$  avec  $a \neq 0$ , on a vu que  $f$  n'est pas continue en  $a$ , donc elle ne peut pas être différentiable en  $a$ .
- On a vu que  $f$  admettait des dérivées directionnelles selon tout vecteur en  $(0,0)$ . Ainsi,  $f$  admet des dérivées partielles en  $(0,0)$  qui sont donnée par  $\partial_1 f(0,0) = D_{(1,0)}f(0,0) = 0$  et  $\partial_2 f(0,0) = D_{(0,1)}f(0,0)$ . Ceci implique que si  $f$  est différentiable en  $(0,0)$ , alors pour tout  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ ,  $df(0,0)(h, k) = h\partial_1 f(0,0) + k\partial_2 f(0,0) = 0$ , d'où  $df(0,0) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})}$  ce qui nous donne l'unique candidat potentiel pour  $df(0,0)$ .

Soit  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ , alors en utilisant la majoration obtenue lors de l'étude de la continuité de  $f$  en  $(0,0)$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{|f((0,0) + (h, k)) - f(0,0) - 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})}(h, k)|}{\|(h, k)\|} &= \frac{|f(h, k)|}{\|(h, k)\|} \\ &\leq \frac{3\|(h, k)\|^2 e^{\|(h, k)\|}}{\|(h, k)\|} \\ &\leq 3\|(h, k)\| e^{\|(h, k)\|} \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0,0)} 0 \end{aligned}$$

ce qui démontre que  $\lim_{(h, k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f((0,0) + (h, k)) - f(0,0) - 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})}(h, k)|}{\|(h, k)\|} = 0$ . Ainsi,  $f$  est différentiable en  $(0,0)$  et  $df(0,0) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})}$ .

6. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'ouvert  $\mathcal{U}$ , donc si elle admet un extremum local sur  $\mathcal{U}$ , c'est nécessairement en un point critique. Soit  $(x, y) \in \mathcal{U}$ , alors

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2xe^{-y} = 0 \\ (6y - x^2 - 3y^2)e^{-y} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y(2 - y) = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (0, 2) \end{aligned}$$

car  $y \neq -x$ . Essayons d'étudier la nature de ce point critique à l'aide de la matrice hessienne de  $f$  (possible car  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{U}$ ). Pour  $(x, y) \in \mathcal{U}$ , on a

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (6 - 12y + x^2 + 3y^2)e^{-y} \end{pmatrix}$$

ce qui entraîne

$$H_f(0, 2) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -6e^{-2} \end{pmatrix} \text{ d'où } \text{Sp}(H_f(0, 2)) = \{2e^{-2}, -6e^{-2}\}.$$

La hessienne de  $f$  en  $(0, 2)$  possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, donc  $f$  n'admet pas d'extremum en  $(0, 2)$  (ce point est un point selle). Finalement,  $f$  n'admet aucun extremum local sur  $\mathcal{U}$ .

7. En considérant séparément les deux expressions de  $f$ , on remarque que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) \geq 0$  et  $f(0, 0) = 0$ , ainsi  $f$  admet un minimum global, à savoir 0, et celui-ci est atteint en  $(0, 0)$  au moins (on pourrait même démontrer qu'il est atteint uniquement en ce point).

Soit  $x > 0$ , alors  $f(x, 0) = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , ce qui montre que  $f$  ne peut pas admettre de maximum global sur  $\mathbb{R}^2$ .

8. La fonction  $h$  étudiée vérifie  $h = g \circ \varphi$  où  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  avec  $\varphi_1 = f + p_1$  et  $\varphi_2 = p_2 \times f$ . Comme  $(1, 0) \in \mathcal{U}$ ,  $f$  est différentiable en  $(1, 0)$ , donc il en est de même des fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , et a fortiori de  $\varphi$ . Puisque  $g$  est différentiable en  $\varphi(1, 0)$ , le théorème de différentiation d'une composée assure la différentiabilité de  $h$  en  $(1, 0)$ . De plus, sa matrice jacobienne en  $(1, 0)$  vérifie

$$\begin{aligned} \text{Jac}_h(1, 0) &= \text{Jac}_{g \circ \varphi}(1, 0) \\ &= \text{Jac}_g(\varphi(1, 0)) \text{Jac}_\varphi(1, 0) \\ &= (\partial_1 g(\varphi(1, 0)) \quad \partial_2 g(\varphi(1, 0))) \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1(1, 0) & \partial_2 \varphi_1(1, 0) \\ \partial_1 \varphi_2(1, 0) & \partial_2 \varphi_2(1, 0) \end{pmatrix} \\ &= (\partial_1 g(f(1, 0) + 1, 0) \quad \partial_1 g(f(1, 0) + 1, 0)) \begin{pmatrix} \partial_1 f(1, 0) + 1 & \partial_2 f(1, 0) \\ 1 \times \partial_1 f(1, 0) & f(1, 0) + 1 \times \partial_2 f(1, 0) \end{pmatrix} \\ &= (\partial_1 g(2, 0) \quad \partial_1 g(2, 0)) \begin{pmatrix} \partial_1 f(1, 0) + 1 & \partial_2 f(1, 0) \\ \partial_1 f(1, 0) & f(1, 0) + \partial_2 f(1, 0) \end{pmatrix} \\ &= (\partial_1 g(2, 0)(\partial_1 f(1, 0) + 1) + \partial_1 g(2, 0)\partial_1 f(1, 0) \quad \partial_1 g(2, 0)\partial_2 f(1, 0) + \partial_1 g(2, 0)(f(1, 0) + \partial_2 f(1, 0))) \end{aligned}$$

Comme par définition,  $\text{Jac}_h(1, 0) = (\partial_1 h(1, 0) \quad \partial_2 h(1, 0))$ , il vient finalement

$$\begin{aligned} \partial_1 h(1, 0) &= \partial_1 g(2, 0)(\partial_1 f(1, 0) + 1) + \partial_1 g(2, 0)\partial_1 f(1, 0) \\ \partial_2 h(1, 0) &= \partial_1 g(2, 0)\partial_2 f(1, 0) + \partial_1 g(2, 0)(f(1, 0) + \partial_2 f(1, 0)) \end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser directement la formule de dérivation en chaîne.

### Correction de l'exercice 5

1. L'application de transposition  $u$  est linéaire, au départ d'un espace de dimension finie, donc elle est continue sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . De même, l'application  $\varphi$  est bilinéaire, au départ de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  avec  $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) < +\infty$ , donc elle est différentiable et par conséquent continue sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. L'ensemble  $\mathcal{A}$  étudié peut se réécrire comme

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \varphi \circ (\text{Id}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, u)(A) = 5I_3\} = \psi^{-1}(\{5I_3\})$$

où  $\psi = \varphi \circ (\text{Id}_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}, u)$  est continue sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  comme composée de fonctions continues. Le singleton  $\{5I_3\}$  étant un fermé de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , cela entraîne que  $\mathcal{A}$  est un fermé de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

3. Puisque  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  est de dimension finie, montrer que  $\mathcal{A}$  est compact équivaut à montrer que  $\mathcal{A}$  est fermé et borné dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Les normes étant toutes deux à deux équivalentes sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on peut choisir la norme  $\|\cdot\|_2$  associée au produit scalaire usuel sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :

$$\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad \|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}({}^t A A)}.$$

Soit  $A \in \mathcal{A}$ , alors  ${}^tAA = 5I_3$  d'où

$$\|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(5I_3)} = \sqrt{15}$$

On a donc trouvé une constante  $m = \sqrt{15} \in \mathbb{R}^+$  telle que, pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\|A\|_2 \leq m$ . L'ensemble  $\mathcal{A}$  est donc borné pour la norme  $\|\cdot\|_2$ , et fermé par la question précédente, donc il s'agit d'un compact de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

4. (a) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\|A \pm \alpha J - A\| = \|\pm \alpha J\| = |\alpha| \|J\| = \alpha \|J\|.$$

La matrice  $J$  n'est pas la matrice nulle, donc  $\|J\| > 0$ . On peut donc poser par exemple  $\alpha = \frac{r}{2\|J\|} > 0$  pour obtenir  $\|A \pm \alpha J - A\| = \frac{r}{2} < r$  ce qui prouve que les matrices  $A \pm \alpha J$  appartiennent à  $B_{\|\cdot\|}(A, r)$ .

(b) Soit  $A$  dans l'intérieur de  $\mathcal{A}$ , alors il existe  $r > 0$  tel que la boule ouverte de centre  $A$  et de rayon  $r$  soit incluse dans  $\mathcal{A}$ . Par la question précédente, les matrices  $A \pm \alpha J$  appartiennent à cette boule, donc sont des éléments de  $\mathcal{A}$ . On a donc

$$\begin{aligned} {}^t(A \pm \alpha J)(A \pm \alpha J) = 5I_3 &\iff {}^tAA \pm \alpha({}^tAJ + {}^tJA) + \alpha^2 {}^tJJ = 5I_3 \\ &\iff \pm \alpha({}^tAJ + JA) + \alpha^2 J^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Si on note  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ , alors le coefficient  $(1,1)$  de la matrice ci-dessus vérifie  $\pm 2a_{1,1} + \alpha^2 = 0$ . Si  $a_{1,1} \geq 0$ , alors  $2a_{1,1} + \alpha^2 \geq \alpha^2 > 0$ , ce qui est absurde. Si  $a_{1,1} < 0$ , alors  $-2a_{1,1} + \alpha^2 > \alpha^2 > 0$ , ce qui est aussi absurde. Il n'est donc pas possible que l'intérieur de  $\mathcal{A}$  contienne un élément, ce qui démontre que  $\mathcal{A}$  est d'intérieur vide.