Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

Analyse IV Durée: 2 heures

Examen final du lundi 6 mai 2024

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème sera sur environ 30 : faire 3 exercices sur les 4 permet d'être noté sur un barème supérieur ou égal à 20.

Exercice 1. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ avec $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose

$$N(P) = \sup_{t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]} |P'(t)| + \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}\right|.$$

1. Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admet que l'application $\| \ . \ \|_\infty : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \|P\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|$$

est aussi une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (n+1)X^n - 1$.
   (a) Montrer que la suite $(P_n)_n$ converge dans $(\mathbb{R}[X], N)$ vers $0_{\mathbb{R}[X]}$.
   (b) Montrer que la suite $(P_n)_n$ diverge dans $(\mathbb{R}[X], \| \ . \ \|_\infty)$. Que peut-on en déduire sur N et $\| \ . \ \|_\infty$?
3. On considère l'ensemble $U = \left\{P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X] \mid \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} > 0\right\}$. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}[X]$ pour la norme N.
4. Montrer que l'endomorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ défini par $u(P) = XP$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est continu sur $\mathbb{R}[X]$ pour la norme $\| \ . \ \|_\infty$ mais ne l'est pas pour la norme N.

Exercice 2. On considère l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \leq 2 \text{ et } |x - y| \leq 2\}$.

1. (a) Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{D}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
   (c) L'ensemble $\mathcal{D}$ est-il compact ?
   (d) On note $\mathcal{U}$ l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| < 2 \text{ et } |x - y| < 2\}$. Montrer que $\mathcal{U}$ est l'intérieur de $\mathcal{D}$.
2. On s'intéresse à la fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) - x$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$.
   (a) Montrer que f admet un minimum et un maximum globaux.
   (b) Montrer que f admet un unique point critique (a, b) dans l'ensemble $\mathcal{U}$ que l'on explicitera.
   (c) Énoncer le résultat de cours utilisant la hessienne de f donnant la nature d'un point critique. Peut-on conclure sur la nature de (a, b) ?
   (d) Déterminer un équivalent de $f(a + t, b) - f(a, b)$ lorsque $t \to 0$ et en déduire la nature du point critique (a, b).

(e) Une étude des variations permet de démontrer que les fonctions

$$g_1 : \begin{array}{ccc} [0;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2+(2-x)^2+1)-x \end{array} \quad \text{et} \quad g_2 : \begin{array}{ccc} [-2;0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x^2+(2+x)^2+1)-x \end{array}$$

sont décroissantes sur leurs domaines respectifs. Déterminer le minimum et le maximum de f ainsi que les points où ils sont atteints.

Exercice 3. Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser directement les inégalités suivantes :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |\sin(u)| \leq |u| \quad \text{et} \quad 0 \leq 1-\cos(u) \leq \frac{u^2}{2}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $G(0)$. On admettra que F est aussi définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$F(0) - F(x) + G(x) = Cx \quad \text{où} \quad C = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
(on rappelle que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $1-\cos(u) = 2\sin^2(u/2)$).
3. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et écrire $G'(x)$ à l'aide d'une l'intégrale pour $x \geq 0$.
4. On admet que G' vérifie aussi les hypothèses du théorème de dérivation, expliciter G'' à l'aide de F sur $\mathbb{R}^+$.
5. À l'aide de la question 2, en déduire que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 que l'on explicitera.
6. En remarquant que F est bornée, en déduire une expression explicite de $F(x)$ pour tout $x \geq 0$, puis de $G(x)$ pour tout $x \geq 0$.
7. Déduire des questions précédentes la valeur de C.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que l'on peut munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des normes $\|\ .\ \|_1$ et $\|\ .\ \|_2$ définies par :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \ \text{ et } \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}.$$

1. Montrer que pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1\|B\|_1$.
2. Justifier l'existence d'un réel $\alpha > 0$ (qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter) tel que, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|H\|_2 \leq \alpha\|H\|_1$.
3. On considère l'application $f : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall M \in S_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = MJM - \mathrm{Tr}(M^2)I_n$$
où J désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1. Montrer que f est différentiable sur $S_n(\mathbb{R})$ et expliciter $\mathrm{d}f(M)$ pour tout $M \in S_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que f admet une dérivée directionnelle en J selon le vecteur I_n et la calculer.
5. On considère une application linéaire $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $g = f \circ u$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, expliciter $\mathrm{d}g(M)$ à l'aide de u et de la différentielle de f en une matrice.

Correction de l'examen terminal d'analyse iv du 6 mai 2024

Correction de l'exercice 1

1. • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe une unique suite de réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ avec seulement un nombre fini de termes a_k non nuls. Par conséquent, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}$ est finie. De plus, la fonction $t \longmapsto P'(t)$ est continue sur le segment $[0; 1/2]$, donc elle est bornée sur ce segment. Ainsi, l'application N est bien définie sur $\mathbb{R}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

   • Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Une somme de termes positifs étant nulle si, et seulement si, chacun des termes de la somme est nul, on obtient :

$$
\begin{aligned}
N(P) = 0 \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} \sup_{t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]} |P'(t)| = 0 \\ \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}\right| = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \quad P'(t) = 0 \text{ car } 0 \leq |P'(t)| \leq \sup\limits_{x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]} |P'(x)| \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} P' = 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ car seul le polynôme nul possède une infinité de racines} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \left\{ \begin{array}{l} P = a_0 \\ \dfrac{a_0}{0+1} + 0 = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad P = 0_{\mathbb{R}[X]}
\end{aligned}
$$

   • Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$
N(\lambda P) = \sup_{t\in[0;1/2]} |\lambda P'(t)| + \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda a_k}{k+1}\right| = \sup_{t\in[0;1/2]} |\lambda|\,|P'(t)| + |\lambda| \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}\right| = |\lambda|\, N(P)
$$

   car $|\lambda| \geq 0$.

   • Soient $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Par inégalité triangulaire de la valeur absolue, pour tout $t \in [0; 1/2]$, $|P'(t) + Q'(t)| \leq |P'(t)| + |Q'(t)| \leq \sup\limits_{x\in[0;1/2]} |P'(x)| + \sup\limits_{x\in[0;1/2]} |Q'(x)|$. Puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble, on en déduit que

$$
\sup_{t\in[0;1/2]} |(P+Q)'(t)| = \sup_{t\in[0;1/2]} |P'(t) + Q'(t)| \leq \sup_{t\in[0;1/2]} |P'(t)| + \sup_{t\in[0;1/2]} |Q'(t)|.
$$

   De plus, $P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k$ d'où (puisque les sommes ci-dessous sont finies)

$$
\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k + b_k}{k+1}\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k+1}\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}\right| + \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k+1}\right|
$$

   ce qui entraîne $N(P + Q) \leq N(P) + N(Q)$. Ainsi, N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors par croissance de la fonction $t \longmapsto \left|n(n+1)t^{n-1}\right| = n(n+1)t^{n-1}$ sur $[0;1/2]$,

$$\begin{aligned} N(P_n) &= \sup_{t\in[0;1/2]} \left|n(n+1)t^{n-1}\right| + \left|\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{0+1}\right| \\ &= n(n+1)\frac{1}{2^{n-1}} + 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

par croissances comparées. Comme $N(P_n) = N(P_n - 0_{\mathbb{R}[X]})$, ceci démontre que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le polynôme nul pour la norme N.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $f_n : t \longmapsto (n+1)t^n - 1$ est croissante, vaut -1 en 0 et $n > 0$ en 1. Par suite, il existe $\alpha_n \in [0;1]$ tel que $|f_n|$ est décroissante sur $[0;\alpha_n]$ et croissante sur $[\alpha_n;1]$. Comme de plus $|f_n(0)| = 1$ et $|f_n(1)| = n \geq 1$, on en déduit que

$$\|P_n\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f_n(t)| = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Si la suite $(P_n)_n$ convergeait vers P dans $(\mathbb{R}[X], \| \ . \ \|_\infty)$, la suite $(\|P_n\|_\infty)_n$ devrait converger vers $\|P\|_\infty$, ce qui est contradictoire puisque l'on vient de voir qu'elle diverge. Ainsi, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge dans $(\mathbb{R}[X], \| \ . \ \|_\infty)$.

Puisque deux normes équivalentes définissent les même suites convergentes, on en déduit que N et $\| \ . \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

3. Le complémentaire de U dans $\mathbb{R}[X]$ est $U^c = \left\{ P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X] \mid \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} \leq 0 \right\}$. Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de U^c qui converge vers Q dans $(\mathbb{R}[X], N)$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$) les coefficients de Q_n (resp. Q). Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in U^c$, on dispose de l'inégalité

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k(n)}{k+1} \leq 0.$$

Par ailleurs,

$$0 \leq \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k(n)}{k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k(n) - a_k}{k+1} \right| \leq N(Q_n - Q) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

on en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k(n)}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1}$. On peut donc passer à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans $(*)$ ce qui entraîne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} \leq 0$$

par conservation des inégalités larges. Ainsi, $Q \in U^c$ ce qui démontre, par caractérisation séquentielle, que U^c est un fermé de $(\mathbb{R}[X], N)$ et ainsi U est un ouvert de $(\mathbb{R}[X], N)$.

4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|u(P)(t)| = |tP(t)| = t\,|P(t)| \leq 1 \times \|P\|_\infty$. Par passage à la borne supérieure, on en déduit donc que $\|u(P)\|_\infty \leq 1 \times \|P\|_\infty$, ceci pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Par l'une des caractérisations équivalentes de la continuité des applications linéaires, u est donc continue sur $\mathbb{R}[X]$ pour la norme $\| \ . \ \|_\infty$.

On a vu ci-dessus que la suite $(P_n)_n$ convergeait vers $0_{\mathbb{R}[X]}$ pour la norme N. Par ailleurs,

$$N(u(P_n)) = N((n+1)X^{n+1} - X) \geq \left|\frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{n}{2(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Ainsi, $N(u(P_n))$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$ donc $u(P_n)$ ne tend pas vers $u(0_{\mathbb{R}[X]}) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi, u n'est pas continue sur $\mathbb{R}[X]$ pour la norme N.

Correction de l'exercice 2

1. (a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on dispose des équivalences
$$(x,y)\in\mathcal{D} \iff \left\{\begin{array}{l} -2\leq x+y\leq 2\\ -2\leq y-x\leq 2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -2-x\leq y\leq 2-x\\ -2+x\leq y\leq 2+x\end{array}\right.$$
On trace donc les droites d'équations respectives $y=-2-x, y=2-x, y=-2+x$ et $y=2+x$ qui délimitent le domaine $\mathcal{D}$.

(b) On peut écrire $\mathcal{D}=g^{-1}(]-\infty;2])\cap h^{-1}(]-\infty;2])$ avec
$$g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & |x+y|\end{array} \quad \text{et } h:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & |x-y|\end{array}$$
Les fonctions g et h sont des composées de fonctions polynomiales, qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec la valeur absolue continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, g et h sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et $]-\infty;2]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc $g^{-1}(]-\infty;2])$ et $h^{-1}(]-\infty;2])$ sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, $\mathcal{D}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés.

(c) On pourrait démontrer que $\mathcal{D}$ correspond à la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 2 pour la norme 1 afin de conclure que $\mathcal{D}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Sinon, on se donne $(x,y)\in\mathcal{D}$, et on peut écrire
$$|x|=\frac{1}{2}|x+y+x-y|\leq\frac{|x+y|+|x-y|}{2}\leq 2 \text{ et } |y|=\frac{1}{2}|y+x+y-x|\leq\frac{|x+y|+|x-y|}{2}\leq 2$$
ce qui entraîne que $\|(x,y)\|_1=|x|+|y|\leq 4$. Ainsi, $\mathcal{D}$ est borné (pour la norme $\|\ .\ \|_1$, mais toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). Comme $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie, les compacts de $\mathbb{R}^2$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}^2$, donc $\mathcal{D}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

(d) Puisque l'intérieur de $\mathcal{D}$ est le plus grand ouvert inclus dans $\mathcal{D}$, on sait déjà que $\mathcal{U}\subset\mathring{\mathcal{D}}\subset\mathcal{D}$. Montrons que les points de $\mathcal{D}\backslash\mathcal{U}$ n'appartiennent pas à $\mathring{\mathcal{D}}$. Cet ensemble consiste en l'union des 4 segments délimitant l'ensemble $\mathcal{D}$. Supposons que $(x,y)\in\mathcal{D}$ vérifie $x\in[0;2]$ et $y=x-2$. Alors pour tout $r>0$, le point $(x,y+r/2)$ appartient à la boule de centre (x,y) et de rayon r pour la norme infinie, mais $|x+y+r/2|=x+y+r/2=2+r/2>2$ donc ce point n'appartient pas à $\mathcal{D}$. Ainsi, il n'existe pas de $r>0$ tel que $B_{\|\ \|_\infty}((x,y),r)\subset\mathcal{D}$, donc $(x,y)\notin\mathring{\mathcal{D}}$. On procède de même sur les 3 autres segments. Ainsi, $\mathcal{U}$ est égal à $\mathring{\mathcal{D}}$.

2. (a) On peut écrire $f=\ln\circ p-q$ où
$$p:\begin{array}{ccc}\mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2+1\end{array} \quad \text{et } q:\begin{array}{ccc}\mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x\end{array}$$
sont polynomiales donc continues sur $\mathcal{D}$. De plus, p est à valeurs strictement positives, et ln est continue sur $]0;+\infty[$, donc f est continue sur le compact non vide $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum et un minimum global sur $\mathcal{D}$.

(b) Par opérations, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$. Soit $(x,y)\in\mathcal{U}$,
$$\begin{aligned}(x,y)\text{ est un point critique de }\mathcal{U} &\iff \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{l}\dfrac{2x}{x^2+y^2+1}-1=0\\ \dfrac{2y}{x^2+y^2+1}=0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{l}(x-1)^2=0\\ y=0\end{array}\right.\\ &\iff (x,y)=(1,0).\end{aligned}$$

(c) Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et $(1,0)$ est un point critique de $\mathcal{U}$, si la hessienne $H_f(1,0)$ de f est de déterminant strictement positif, et de trace strictement positive (resp. négative) alors f admet un minimum local strict en $(1,0)$ (resp. maximum local strict). Si $\det(H_f(1,0)) < 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en $(1,0)$. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$, on a

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2(x^2+y^2+1)-4x^2}{(x^2+y^2+1)^2} & -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\ -\dfrac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2} & \dfrac{2(x^2+y^2+1)-4y^2}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix} \text{ d'où } H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\det(H_f(1,0)) = 0$ donc on ne peut pas conclure sur la nature du point critique avec les résultats de cours.

(d) Soit $t \in \mathbb{R}$ proche de 0,

$$\begin{aligned} f(1+t,0) - f(1,0) &= \ln((1+t)^2+1) - (1+t) - (\ln(2)-1) \\ &= \ln(2+2t+t^2) - t - \ln(2) \\ &= \ln(1+t+t^2/2) - t \\ &= t + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3) - t \\ &= -\frac{t^3}{6} + \underset{t\to 0}{o}(t^3) \\ &\underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^3}{6} \end{aligned}$$

Comme $-\dfrac{t^3}{6}$ change de signe au voisinage de 0, la fonction f n'admet pas d'extremum local en $(1,0)$.

(e) Le minimum (resp. maximum) de f est atteint soit en un point de $\mathcal{U}$ qui est ouvert, auquel cas c'est en un point critique, soit en un point de la frontière de $\mathcal{D}$ notée $F = \mathcal{D}\backslash\mathcal{U}$. Comme f n'admet pas d'extremum local en l'unique point critique de $\mathcal{U}$, ses extrema sont atteints en des points de F. Or $F = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ où $S_1 = \{(x, 2-x) \mid x \in [0;2]\}$, $S_2 = \{(x,-2+x) \mid x \in [0;2]\}$, $S_3 = \{(x, 2+x) \mid x \in [-2;0]\}$ et $S_4 = \{(x,-2-x) \mid x \in [-2;0]\}$. La restriction de f à S_1 ou S_2 s'identifie avec la fonction g_1, et la restriction de f à S_3 ou S_4 s'identifie avec la fonction g_2. De plus,

$$g_1(0) = \ln(5) < g_2(-2) = \ln(5) + 2 \text{ et } g_1(2) = \ln(5) - 2 < g_2(0) = \ln(5)$$

donc par décroissance de g_1 et g_2, le minimum de f vaut $\ln(5) - 2$ et il est atteint en $(2,0)$. Enfin, le maximum de f vaut $\ln(5) + 2$ et il est atteint en $(-2,0)$.

Correction de l'exercice 3

1. Posons $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)} \end{array}$ de sorte que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$.

   - On a $g = \dfrac{h \circ p}{q}$ avec

   $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & xt \end{array}$ $\quad q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & t^2(1+t^2) \end{array}$ et $h = \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & 1-\cos(u) \end{array}$

   Puisque p et q sont polynomiales, elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En outre, q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$, donc par opérations, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et en particulier continue sur $\mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$.

- Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}^+$ un segment inclus dans $\mathbb{R}^+$. Soit $(x,y) \in [a;b]\times]0;+\infty[$, alors puisque $a^2 \leq x^2 \leq b^2$

$$|g(x,t)| = \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)} \leq \frac{(xt)^2/2}{t^2(1+t^2)} \leq \frac{b^2}{2(1+t^2)} := \varphi_b(t)$$

avec $\varphi_b :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue donc continue par morceaux sur $]0;+\infty[$. Or la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc intégrable sur tout segment $[0;A]$ avec $A>0$, et intégrable sur $[A;+\infty[$ par la règle de Riemann car $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ avec $2>1$. Ceci entraîne l'intégrabilité de φ_b sur $]0;+\infty[$.

Par le théorème de continuité par domination, la fonction G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $G(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0 \,\mathrm{d}t = 0$.

2. Soit $x>0$,

$$\begin{aligned}
F(0)-F(x)+G(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1-\cos(xt)}{1+t^2} + \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{1+t^2}\,\frac{t^2+1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(xt/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(u)}{(2u/x)^2}\,\frac{2}{x}\,\mathrm{d}u \text{ par le changement de variable } u = \frac{xt}{2} \text{ car } x>0 \\
&= x\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

3. On a déjà vérifié les deux premières hypothèses du théorème de dérivation par domination dans la question 1.

   - On a montré que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[$. En particulier, elle admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, notée $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, qui est continue sur $\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[$.
   - Soit $[a;b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}^+$. Soit $(x,t) \in [a;b]\times]0;+\infty[$, alors

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\right| \leq \frac{|xt|}{t(1+t^2)} \leq \frac{b}{1+t^2} = 2\varphi_b(t)$$

   avec $2\varphi_b :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Par le théorème de dérivation, on en déduit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

4. Puisque G' vérifie les hypothèses du théorème de dérivation, G' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = F(x).$$

5. Puisque pour tout $x>0$, $F(x) = F(0)+G(x)-Cx$, F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, pour tout $x>0$,

$$F'(x) = G'(x) - C \quad \text{d'où} \quad F''(x) = G''(x) = F(x).$$

Ainsi, F est solution de l'équation différentielle $(E) : y'' = y$ sur $]0;+\infty[$.

6. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$ qui admet deux solutions réelles distinctes 1 et -1. Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x > 0$, $F(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$. Par continuité des fonctions intervenant, cette égalité est encore vraie en 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

donc la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, il vient nécessairement $\lambda = 0$. On peut alors remarquer que $F(0) = \frac{\pi}{2} = \mu e^0 = \mu$ d'où $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
Ceci entraîne que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $G''(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G'(x) = -\frac{\pi}{2}e^{-x} + \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. En remarquant que $G'(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(0)}{t(1+t^2)} \mathrm{d}t = 0$, on obtient $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, il existe $\beta \in \mathbb{R}^+$ tel que $G(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x} + \frac{\pi}{2}x + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et l'évaluation de cette égalité en 0 donne $\beta = -\frac{\pi}{2}$.

7. Par la question 2, l'évaluation de l'identité en $x = 1$ donne

$$C = F(0) - F(1) + G(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}e^{-1} + \frac{\pi}{2}e^{-1} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 4

1. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par la formule du produit matriciel,

$$\begin{aligned}
\|AB\|_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right| \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|\,\|B\|_1 \text{ car par sommation de termes positifs } \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \leq \|B\|_1 \\
&\leq \|A\|_1\|B\|_1
\end{aligned}$$

2. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont deux à deux équivalentes. En particulier, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|H\|_2 \leq \alpha\|H\|_1$.

3. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Soit $H \in S_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}
f(M+H) &= (M+H)J(M+H) - \mathrm{Tr}((M+H)^2)I_n \\
&= (MJ+HJ)(M+H) - \mathrm{Tr}(M^2+MH+HM+H^2)I_n \\
&= MJM + MJH + HJM + HJH - \mathrm{Tr}(M^2)I_n - 2\,\mathrm{Tr}(MH)I_n - \mathrm{Tr}(H^2)I_n \\
&\qquad\qquad \text{par linéarité et propriétés de la trace} \\
&= f(M) + (MJH + HJM - 2\,\mathrm{Tr}(MH)I_n) + HJH - \mathrm{Tr}(H^2)I_n.
\end{aligned}$$

Posons $u : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $u(H) = MJH + HJM - 2\,\mathrm{Tr}(MH)I_n$ pour tout $H \in S_n(\mathbb{R})$ ($u(H) \in S_n(\mathbb{R})$ puisque ${}^tMJH = {}^tH{}^tJ{}^tM = HJM$). Alors, pour tous $H, K \in S_n(\mathbb{R})$, pour tout

$\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u(\lambda H + K) = MJ(\lambda H + K) + (\lambda H + K)JM - 2\,\mathrm{Tr}(M(\lambda H + K))I_n)\lambda u(H) + u(K)$$

donc u est linéaire.

Montrons que $HJH - \mathrm{Tr}(H^2)I_n = o(\|H\|_1)$ lorsque $H \to 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Soit $H \in S_n(\mathbb{R})$, $H \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
0 \leq \|HJH - \mathrm{Tr}(H^2)I_n\|_1 &\leq \|HJH\|_1 + \|\,\mathrm{Tr}(H^2)I_n\|_1 \\
&\leq \|H\|_1\|JH\|_1 + \mathrm{Tr}(H^2)\|I_n\|_1 \text{ par Q1 et homogénéité} \\
&\leq \|H\|_1^2\|J\|_1 + \mathrm{Tr}({}^tHH)n \\
&\leq n^2\|H\|_1^2 + n\|H\|_2^2 \\
&\leq n^2\|H\|_1^2 + n\alpha^2\|H\|_1^2 \text{ par Q2}
\end{aligned}$$

donc

$$0 \leq \left\| \frac{HJH - \mathrm{Tr}(H^2)I_n}{\|H\|_1} \right\|_1 = \frac{\|HJH - \mathrm{Tr}(H^2)I_n\|_1}{\|H\|_1} \leq (n^2 + n\alpha^2)\|H\|_1 \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui entraîne finalement

$$f(M+H) = f(M) + u(H) + \underset{H\to 0}{o}(\|H\|_1) \qquad \text{avec } u \in \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R})).$$

Ainsi, f est différentiable en M et $\mathrm{d}f(M) = u : H \longmapsto MJH + HJM - 2\,\mathrm{Tr}(MH)I_n$, ceci pour tout $M \in S_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que f est différentiable sur $S_n(\mathbb{R})$.

4. Puisque f est différentiable en J, elle admet une dérivée directionnelle en J selon tout vecteur $M \in S_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, f admet une dérivée directionnelle en J selon le vecteur I_n et

$$D_{I_n}f(J) = \mathrm{d}f(J)(I_n) = J^2I_n + I_nJ^2 - 2\,\mathrm{Tr}(JI_n)I_n = 2J^2 - 2\,\mathrm{Tr}(J)I_n = 2nJ - 2nI_n.$$

5. Puisque u est linéaire, elle est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}u(M) = u$. Par composition, $g = f \circ u$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{d}g(M) = \mathrm{d}f(u(M)) \circ \mathrm{d}u(M) = \mathrm{d}f(u(M)) \circ u.$$