Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025

Algèbre IV Durée: 2 heures

Examen final du vendredi 16 mai 2025

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones ou autre objet connecté est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

*Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème donné, sur environ 30 points pour tenir compte de la longueur du sujet, est uniquement **indicatif**.*

Exercice 1. ($\simeq$ 5 points) On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique, et on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0 \text{ et } 2x - z - t = 0\}.$$

On note s la symétrie orthogonale par rapport à F et p la projection orthogonale sur F.

1. Rappeler la définition de s et donner une écriture de s à l'aide de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$ et p.
2. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
3. Pour $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, donner une expression explicite de $s(X)$ en fonction des coordonnées de X.

Exercice 2. ($\simeq$ 9.5 points) Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. On dit qu'un endomorphisme u de E est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$.

1. Soit u un endomorphisme normal de E.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$. A-t-on $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^*)$?
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme normal de E.
   (d) En déduire que si λ est une valeur propre de u, alors λ est aussi une valeur propre de u^* et que les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(u^*)$ respectivement associés à u et à u^* sont égaux.
   (e) Montrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux. *Indication : on pourra éventuellement considérer le produit scalaire $\langle u(x), y\rangle$ pour x et y bien choisis.*
2. L'objectif de cette question est de résoudre l'équation matricielle $(*)$: $M^tMM = I_n$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit M une matrice solution de $(*)$. Montrer que M est inversible et exprimer son inverse en fonction de M.
   (b) On note v l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M. Montrer que v est normal.
   (c) Montrer que M est symétrique définie positive.
   (d) Résoudre l'équation $(*)$.

Exercice 3. **($\simeq 7.5$ points)** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, telle que :

$$\forall t \in]0;\pi[, \quad f(t) = \frac{\pi - t}{2}.$$

1. Représenter le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$ (bien justifier).
2. La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$?
3. Déterminer les coefficients de Fourier de f trigonométriques et exponentiels.
4. Déterminer les valeurs des sommes :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} \quad \text{et} \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 4. **($\simeq 8.5$ points)** *La dernière question peut se traiter sans avoir réussi les précédentes.*

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $a \in E$ non nul. On considère l'endomorphisme f de E défini par : $f(x) = a \wedge x$ pour tout $x \in E$.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de premier vecteur $e_1 = \dfrac{a}{\|a\|}$.
2. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. L'endomorphisme f est-il orthogonal ?
4. On note g l'endomorphisme de E défini par $g(x) = \langle x, a\rangle a + f(x)$ pour $x \in E$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que g soit un endomorphisme orthogonal.
5. On suppose désormais que $\|a\| = 1$. On considère r la rotation d'axe dirigé et orienté par e_2, et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ modulo $[2\pi]$. On note $h = g \circ r$.
   (a) Montrer que la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Justifier que $h \in SO(E)$ et déterminer la nature ainsi que les caractéristiques de h.

Correction de l'examen terminal d'algèbre iv du 16 mai 2025

Correction de l'exercice 1

1. La symétrie orthogonale s par rapport à F correspond à la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$. Il s'agit de l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ satisfaisant :

$$\forall x = a + b \in \mathbb{R}^4 = F \oplus F^{\perp} \text{ avec } (a, b) \in F \times F^{\perp}, \quad s(x) = a - b.$$

Comme la projection orthogonale p vérifie (avec les mêmes notations que ci-dessus), $p(x) = a$, on peut écrire

$$s(x) = 2a - (a + b) = 2p(x) - x = (2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})(x)$$

ce qui démontre que $s = 2p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

2. Par définition du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^4$, on peut remarquer que :

$$F = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid \langle X, (1, -1, -1, 1)\rangle = 0 \text{ et } \langle X, (2, 0, -1, -1)\rangle = 0\} = (\mathrm{Vect}\{u_1, u_2\})^{\perp}$$

où $u_1 = (1, -1, -1, 1)$ et $u_2 = (2, 0, -1, -1)$. Comme $\mathbb{R}^4$ est un espace euclidien, on en déduit que

$$F^{\perp} = \left((\mathrm{Vect}\{u_1, u_2\})^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}.$$

Les vecteurs u_1 et u_2 étant non colinéaires, l'égalité précédente entraîne que la famille (u_1, u_2) est une base de $F^{\perp}$. Comme $\langle u_1, u_2\rangle = 2 + 0 + 1 - 1 = 2 \neq 0$, cette famille n'est pas orthogonale. On peut déterminer une base orthonormée de $F^{\perp}$ à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt par exemple. Posons $v_1 = u_1$, alors $\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1\rangle = 4$ et on définit $e_1 = \dfrac{1}{\|v_1\|} v_1 = \dfrac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$. On pose ensuite

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \langle e_1, u_2\rangle e_1 \\ &= (2, 0, -1, -1) - \frac{1}{4}\langle u_1, u_2\rangle u_1 \\ &= (2, 0, -1, -1) - \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1) \\ &= \frac{1}{2}(3, 1, -1, -3) \end{aligned}$$

alors

$$\|v_2\| = \left|\frac{1}{2}\right| \|(3, 1, -1, -3)\| = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5} \text{ donc on pose } e_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}(3, 1, -1, -3).$$

Ainsi, la famille (e_1, e_2) est une base orthonormée de $F^{\perp}$.

3. Notons q la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} = p + q$, on peut aussi écrire s sous la forme $s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} - 2q$. Par la formule du projeté orthogonal, comme (e_1, e_2) est une base orthonormée de $F^{\perp}$, il vient alors, pour $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} s(X) &= X - 2\sum_{k=1}^{2} \langle e_k, X\rangle e_k \\ &= X - 2\left(\frac{1}{4}\langle (1, -1, -1, 1), X\rangle (1, -1, -1, 1) + \frac{1}{20}\langle (3, 1, -1, -3), X\rangle (3, 1, -1, -3)\right) \\ &= X - \frac{1}{10}\left(5(x - y - z + t)(1, -1, -1, 1) + (3x + y - z - 3t)(3, 1, -1, -3)\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(-4x + 2y + 8z + 4t, 2x + 4y - 4z + 8t, 8x - 4y + 4z + 2t, 4x + 8y + 2z - 4t\right) \\ &= \frac{1}{5}(-2x + y + 4z + 2t, x + 2y - 2z + 4t, 4x - 2y + 2z + t, 2x + 4y + z - 2t) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2

1. (a) Soit $x \in E$. En utilisant deux fois la définition de l'adjoint, ainsi que le fait que u commute avec son adjoint car u est normal, on a :

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle x, u^*(u(x))\rangle = \langle x, u(u^*(x))\rangle = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \|u^*(x)\|^2.$$

Par positivité de la norme, on en déduit que $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

(b) Soit $x \in E$, par séparation de la norme, et en utilisant la question précédente,

$$x \in \mathrm{Ker}(u) \iff u(x) = 0_E \iff \|u(x)\| = 0 \iff \|u^*(x)\| = 0 \iff u^*(x) = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(u^*)$$

ce qui permet de conclure que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$.

Par le cours, on dispose de l'égalité $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}(u))^\perp$. En exploitant l'égalité démontrée sur les noyaux, cela entraîne

$$\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}(u^*))^\perp = ((\mathrm{Im}(u))^\perp)^\perp = \mathrm{Im}(u)$$

puisque E est de dimension finie.

(c) Puisque l'adjoint d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des adjoints,

$$(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^* = u^* - \lambda\,\mathrm{Id}_E^* = u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$$

car Id_E est un endomorphisme symétrique (en effet, pour tous $x, y \in E$, $\langle \mathrm{Id}_E(x), y\rangle = \langle x, \mathrm{Id}_E(y)\rangle$). Comme Id_E commute avec tous les endomorphismes de E, et que u^* commute avec u, on en déduit que $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ commute avec son adjoint $u^* - \lambda\,\mathrm{Id}_E$, ce qui prouve que $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ est normal.

(d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque l'endomorphisme $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ est normal, en utilisant les résultats prouvés aux questions 1b et 1c, on a directement

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}((u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^*) = \mathrm{Ker}(u^* - \lambda\,\mathrm{Id}_E).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } u \quad &\iff \quad \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\} \\
&\iff \quad \mathrm{Ker}(u^* - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\} \\
&\iff \quad \lambda \text{ est valeur propre de } u^*
\end{aligned}$$

De plus, dans ce cas, les sous-espaces propres associés à λ pour u et u^* sont égaux car $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(u^* - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = E_\lambda(u^*)$.

(e) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u. On cherche à démontrer que $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux. Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Alors d'une part,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

et d'autre part, comme $E_\mu(u) = E_\mu(u^*)$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle = y\langle x, y\rangle.$$

Ceci implique $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ et ainsi $\langle x, y\rangle = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$, ce qui achève de démontrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

2. (a) Comme M est solution de $(*)$, on a $M({}^tMM) = I_n$, ce qui montre que M est inversible d'inverse $M^{-1} = {}^tMM$. Remarquons qu'on aurait aussi pu utiliser $(M{}^tM)M = I_n$ pour en déduire que $M^{-1} = M{}^tM$.

   (b) Par la question précédente, on a $M{}^tM = M^{-1} = {}^tMM$, ainsi M commute avec sa transposée. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, on sait que ${}^tM = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v^*)$. L'égalité ${}^tMM = M{}^tM$ donne donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v^* \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v \circ v^*)$ ce qui entraîne que $v^* \circ v = v \circ v^*$ et prouve que v est un endomorphisme normal.

   (c) Comme $M^{-1} = M{}^tM$, on obtient $M = (M{}^tM)^{-1} = ({}^tM)^{-1}M^{-1} = {}^t(M^{-1})M^{-1}$ car pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $({}^tA)^{-1} = ({}^tA)^{-1}$. En notant $N = M^{-1}$, on a alors :

$$ {}^tM = {}^t({}^tNN) = {}^tN{}^t({}^tN) = {}^tNN = M $$

   donc M est symétrique. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$ {}^tXMX = {}^tX{}^tNNX = {}^t(NX)(NX) = \|NX\|^2 \geq 0 $$

   (où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). De plus, on a l'équivalence :

$$ {}^tXMX = 0 \iff \|NX\|^2 = 0 \iff NX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} $$

   car N est inversible donc $\mathrm{Ker}(N) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

   (d) Puisque M est symétrique, l'égalité $(*)$ devient $M^3 = I_n$. Par ailleurs, par la version matricielle du théorème spectral, comme $M \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale réelle telle que $D = P^{-1}MP$. On en déduit que $D^3 = P^{-1}M^3P = P^{-1}I_nP = I_n$. En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de D, on trouve alors

$$ D^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^3 \end{pmatrix} = I_n $$

   ce qui entraîne que $\lambda_i^3 = 1$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$. Comme par ailleurs λ_i est réel, on en conclut que $\lambda_i = 1$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et ainsi $D = I_n$ d'où $M = I_n$. On vient donc de démontrer que l'ensemble des solutions de $(*)$ est inclus dans $\{I_n\}$. Réciproquement, la matrice I_n est bien solution de $(*)$ car $I_n{}^tI_nI_n = I_n^3 = I_n$. Ainsi, l'ensemble des solutions de $(*)$ est $\{I_n\}$.

Correction de l'exercice 3

1.

2. La restriction de f à $]0; \pi[$ est donnée par $x \longmapsto \dfrac{\pi - t}{2}$, qui se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0; \pi]$ (par la fonction $x \longmapsto \dfrac{\pi - t}{2}$ elle-même). La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0; \pi]$, puis sur $[-\pi; \pi]$ par parité. Par 2π-périodicité, f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de Jordan-Dirichlet, on en déduit que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de f, notée $\widetilde{f}$, définie par

$$ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \text{ où } f(t^+) = \lim_{\substack{x \to t \\ x > t}} f(x) \text{ et } f(t^-) = \lim_{\substack{x \to t \\ x < t}} f(x). $$

Sur l'ouvert $]0; \pi[$, f est continue par définition, donc pour tout $t \in]0; \pi[$, $\widetilde{f}(t) = f(t)$ et cette égalité est aussi vraie sur $] - \pi; 0[$ par imparité de f. Par ailleurs, $f(\pi) = 0$, $f(\pi^-) = \lim\limits_{\substack{x \to t \\ x < \pi}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to t \\ x < \pi}} \dfrac{\pi - x}{2} = 0$,

$f(\pi^+) = f(-\pi^+) = -f(\pi^-) = 0$, donc f est aussi continue en π. Par 2π-périodicité, on obtient donc $f(t) = \widetilde{f}(t)$ pour tout $t \in \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Enfin, soit $t \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, alors par 2π-périodicité

$$\widetilde{f}(t) = \widetilde{f}(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0 = f(t)$$

(pour des raisons similaires à celles ci-dessus). Ainsi, f est égale à sa régularisée sur $\mathbb{R}$, donc f est égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier trigonométriques de f. Comme la fonction f est impaire, on a déjà, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ ($b_0(f) = 0$ par définition) et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \sin(nt)\,\mathrm{d}t \text{ par parité de } t \longmapsto f(t)\sin(nt) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\pi - t) \sin(nt)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par intégration par parties avec les fonctions $u : t \longmapsto \pi - t$ et $v : t \longmapsto -\frac{1}{n}\cos(nt)$, qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, on obtient

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\pi - t}{n}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} - \underbrace{\left[\frac{1}{n^2}\sin(nt)\right]_0^{\pi}}_{=0}\right) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, notons $c_n(f)$ le coefficient de Fourier exponentiel d'indice n de f. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f))$$

ce qui entraîne : $c_0(f) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n(f) = -\frac{i}{2n} \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = +\frac{i}{2n}$$

ainsi, $c_n(f) = -\frac{i}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.

4. Puisque la somme de la série de Fourier de f est égale à f sur $\mathbb{R}$ par la question 2, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on dispose de l'égalité

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(nx).$$

En évaluant ceci en $x = 1$, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = f(1) = \frac{\pi - 1}{2} \text{ car } 1 \in \,]0;\pi[\,.$$

Par ailleurs, puisque la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (car de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) et 2π-périodique, on peut appliquer le théorème de Parseval-Bessel et ainsi :

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

où (en utilisant la parité de $t \longmapsto |f(t)|^2$ pour la 2-ième égalité)

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)^2}{4} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{3}(\pi-t)^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{12\pi} = \frac{\pi^2}{12}$$

et ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Correction de l'exercice 4

1. Comme a est non nul, la famille (a) est libre, donc on peut la compléter en une base de E. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur cette base, on peut créer une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de premier vecteur $e_1 = \dfrac{a}{\|a\|}$. Si la base obtenue est directe, elle répond à la question. Si elle est indirecte, on remplace le vecteur e_3 par son opposé, ce qui ne modifie pas le caractère orthonormé de la famille mais la transforme en base directe.
2. Comme $e_1 = \dfrac{a}{\|a\|}$ est colinéaire à a, $f(e_1) = a \wedge e_1 = 0_E$. De plus, puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée directe, on sait que $e_1 \wedge e_2 = e_3$ et $e_3 \wedge e_1 = e_2$. Par bilinéarité et antisymétrie du produit vectoriel, on en déduit que

$$f(e_2) = a \wedge e_2 = \|a\| e_1 \wedge e_2 = \|a\| e_3 \text{ et } f(e_3) = a \wedge e_3 = -\|a\| e_3 \wedge e_1 = -\|a\| e_2$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|a\| \\ 0 & \|a\| & 0 \end{pmatrix}$$

3. L'endomorphisme f ne peut pas être orthogonal car il n'est pas bijectif : $e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ avec $e_1 \neq 0_E$ donc f n'est pas injective.
4. Par calcul direct,

$$g(e_1) = \langle e_1, a\rangle a + f(e_1) = \frac{1}{\|a\|}\langle a, a\rangle a = \|a\|^2 e_1, \; g(e_2) = f(e_2) \text{ et } g(e_3) = f(e_3)$$

car e_2 et e_3 sont orthogonaux à e_1, donc à a. Ainsi,

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|a\| \\ 0 & \|a\| & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, on dispose des équivalences :

$$\begin{aligned} g \in O(E) &\iff A \in O_3(\mathbb{R}) \\ &\iff {}^tAA = I_3 \\ &\iff \begin{pmatrix} \|a\|^4 & 0 & 0 \\ 0 & \|a\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|a\|^2 \end{pmatrix} = I_3 \\ &\iff \|a\|^4 = 1 \text{ et } \|a\|^2 = 1 \\ &\iff \|a\| = 1 \text{ par positivité de la norme} \end{aligned}$$

5. (a) Comme r est la rotation d'axe dirigé et orienté par e_2 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, on sait que la matrice de r dans n'importe qu'elle base orthonormée directe de premier vecteur e_2, en particulier dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, e_3, e_1)$, est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ce qui implique que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Aini, la matrice de $h = g \circ r$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Comme h est la composée de deux endomorphismes orthogonaux, et que $O(E)$ est stable par composition, on a déjà que $h \in O(E)$. De plus, en développant selon la 2ième colonne,

$$\det(h) = \det(M) = -\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = 1$$

ce qui démontre que $h \in SO(E)$.

Comme $h \neq \mathrm{Id}_E$ (puisque $M \neq I_3$), h est une rotation, autour d'un axe $D = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_E)$. Soit $x \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$\begin{aligned}
x \in D = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{Id}_E) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M - I_3) \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_3 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = x_3 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = x_3(\sqrt{3}e_1 + e_2 + e_3)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'axe de la rotation h est $D = \{x_3(\sqrt{3}e_1 + e_2 + e_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{u\}$ où $u = \sqrt{3}e_1 + e_2 + e_3$. Orientons cet axe par le vecteur $v = \dfrac{u}{\|u\|}$ et notons θ l'angle orienté de la rotation h. Par la forme de la matrice réduite de h, on sait que

$$\mathrm{Tr}(h) = 1 + 2\cos(\theta) \quad \text{d 'où} \quad \cos(\theta) = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(M) - 1) = -\frac{1}{4}.$$

Par ailleurs, comme le vecteur e_2 n'appartient pas à D, le signe de $\sin(\theta)$ est donné par celui du produit mixte suivant

$$\begin{aligned}
[v, e_2, f(e_2)] &= \det_{\mathrm{B}}\left(\frac{u}{\|u\|}, e_2, f(e_2)\right) \quad \text{car } \mathcal{B} \text{ est une base orthonormée directe de } E \\
&= \frac{1}{\|u\|}\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\|u\|} > 0
\end{aligned}$$

L'angle recherché est donc $\theta \equiv +\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) \mod [2\pi]$.