Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

Algèbre IV Durée: 2 heures

Examen final du lundi 13 mai 2024

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème sur environ 26 points tiendra compte de la longueur du sujet.

Exercice 1. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle\, .\,,\, .\,\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que, pour tout $P \in E$,
$$\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t.$$
Préciser les polynômes pour lesquels il y a égalité.
3. On considère l'ensemble suivant
$$F = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \int_{-1}^{1}(t^3 - t)P'(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \int_{-1}^{1}(t^2 + t - 1)P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}.$$
Montrer que F est l'orthogonal du sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Vect}\{3X^2 - 1, X^2 + X - 1\}$.
4. En déduire une inclusion entre $F^\perp$ et G.
5. Justifier l'identité $\mathbb{R}[X] = G \oplus G^\perp$, puis, à l'aide de cette décomposition, montrer que $F^\perp = G$.
6. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
7. En déduire la distance $\mathrm{d}(X, F)$ du vecteur X à F.

Exercice 2. On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \max(\cos(x), 0)$.

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$?
3. Déterminer la série de Fourier de f en formulation trigonométrique.
4. Déduire de ce qui précède les valeurs des sommes suivantes :
$$U = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2 - 1} \quad \text{et} \quad V = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2 - 1)^2}.$$

Exercice 3. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'endomorphisme $u \circ u^*$ est un endomorphisme symétrique positif.
2. On note $\lambda = \min(\mathrm{Sp}(u \circ u^*))$ et $\mu = \max(\mathrm{Sp}(u \circ u^*))$ où $\mathrm{Sp}(u \circ u^*)$ désigne le spectre de $u \circ u^*$. Montrer que, pour tout $x \in E$,
$$0 \leq \lambda\|x\|^2 \leq \|u^*(x)\|^2 \leq \mu\|x\|^2.$$

Exercice 4. Soient $n \geq 2$, a un réel et $A \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = aMA.$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel : $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$.

1. Déterminer l'adjoint de f, noté f^*.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $a = 1$, on considère la symétrie orthogonale s de $\mathbb{R}^n$ (muni de son produit scalaire usuel) par rapport au sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\{(1, -2, 0, \dots, 0)\}$ et on suppose que A est la matrice de s dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Justifier que f est autoadjoint.
   (b) En déduire la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques (on ne demande pas de déterminer explicitement ceux-ci).
4. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $a = -1$, $n = 3$ et que la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   On note $G = \mathrm{Vect}\{I_3, A, A^2\}$.
   (a) Déterminer un réel $\beta \in \mathbb{R}^+$ tel que la famille $\mathcal{G} = (\beta I_3, \beta A, \beta A^2)$ soit une base orthonormée de G. Dans la suite de l'exercice, on supposera que G est orienté par $\mathcal{G}$.
   (b) Justifier que l'endomorphisme g induit par f sur G est un endomorphisme orthogonal de G.
   (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B} = (I_3, A, A^2)$ de G.
   (d) En déduire la nature de g.
   (e) Déterminer explicitement les éléments caractéristiques de g.

Correction de l'examen terminal d'algèbre iv du 13 mai 2024

Correction de l'exercice 1

1. Soient $P, Q \in E$. La fonction $t \longmapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1;1]$ donc intégrable sur ce segment. Par conséquent, l'application $\langle\, .\,,\, .\,\rangle$ est bien définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   - Soient $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale,
   $$\langle P, \lambda Q + R\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)(\lambda Q(t) + R(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\langle P, Q\rangle + \langle P, R\rangle$$
   ce qui démontre la linéarité à droite de $\langle\, .\,,\, .\,\rangle$.
   - Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, on a directement, pour tous $P, Q \in E$, $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$, ce qui prouve que $\langle\, .\,,\, .\,\rangle$ est symétrique, donc bilinéaire symétrique.
   - Soit $P \in E$, par positivité de l'intégrale, puisque $t \longmapsto (P(t))^2$ est à valeurs positives, $\langle P, P\rangle$ est positif.
   - Soit $P \in E$,
   $$\begin{aligned} \langle P, P\rangle = 0 \quad &\iff \quad \int_{-1}^{1} (P(t))^2\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\iff \quad \forall t \in [-1;1], \quad (P(t))^2 = 0 \text{ par continuité et positivité de } t \longmapsto (P(t))^2 \\ &\iff \quad \forall t \in [-1;1], \quad P(t) = 0 \\ &\iff \quad P = 0_{\mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$
   puisque seul le polynôme nul admet une infinité de racines.

   Ainsi, $\langle P, P\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, *i.e.* un produit scalaire sur E.

2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tous $P, Q \in E$, $\langle P, Q\rangle^2 \leq \|P\|^2\|Q\|^2$. Soit $P \in E$, en appliquant ceci à P et au polynôme $Q = 1$, il vient
   $$\langle P, Q\rangle^2 = \left(\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \|P\|^2\|Q\|^2 = \int_{-1}^{1} (P(t))^2\,\mathrm{d}t \times \int_{-1}^{1} 1^2\,\mathrm{d}t = 2\int_{-1}^{1} (P(t))^2\,\mathrm{d}t$$
   d'où
   $$\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_{-1}^{1} (P(t))^2\,\mathrm{d}t$$
   De plus, il y a égalité si, et seulement si, la famille $(P, 1)$ est liée, ce qui équivaut (puisque $1 \neq 0_E$) à l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda$. Autrement dit, il y a égalité si, et seulement si, P est constant.

3. Soit $P \in E$, l'égalité $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2 + t - 1)P(t) = 0$ équivaut à $\langle X^2 + X - 1, P\rangle = 0$. De plus, par intégration par parties (justifiée car les fonctions $t \longmapsto t^3 - t$ et $t \longmapsto P(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1;1]$),
   $$\int_{-1}^{1} (t^3 - t)P'(t)\,\mathrm{d}t = [(t^3 - t)P(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (3t^2 - 1)P(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} (3t^2 - 1)P(t)\,\mathrm{d}t$$
   ce qui implique que $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3 - t)P'(t)\,\mathrm{d}t = 0 \iff -\langle 3X^2 - 1, P\rangle = 0 \iff \langle 3X^2 - 1, P\rangle = 0$. Ainsi,
   $$P \in F \iff \langle 3X^2 - 1, P\rangle = 0 \text{ et } \langle X^2 + X - 1, P\rangle = 0 \iff P \in (\mathrm{Vect}\{3X^2 - 1, X^2 + X - 1\})^{\perp}$$
   car la famille $\{3X^2 - 1, X^2 + X - 1\}$ est génératrice de G, d'où l'égalité souhaitée $F = G^{\perp}$.

4. Ainsi $F^{\perp} = (G^{\perp})^{\perp}$ contient G par le cours.

5. Puisque G est de dimension finie (car engendré par une famille de cardinal 2), on sait par le cours que $E = G \oplus G^\perp$ (ce qui justifiera ci-dessous la définition de la projection orthogonale sur G). Soit $P \in F^\perp$, il existe un unique couple $(Q,R) \in G \times G^\perp$ tel que $P = Q + R$. Comme $P \in F^\perp$, par définition, P est orthogonal à tous les éléments de $F = G^\perp$, en particulier à R, ce qui entraîne

$$0 = \langle P, R\rangle = \langle Q, R\rangle + \langle R, R\rangle = \langle R, R\rangle$$

car $Q \in G$ et $R \in G^\perp$. On en conclut que $R = 0_E$ d'où $P = Q \in G$ ce qui prouve l'inclusion $F^\perp \subset G$ et achève de démontrer l'égalité $F = G^\perp$.

6. La famille (P_1, P_2) où $P_1 = 3X^2 - 1$ et $P_2 = X^2 + X - 1$ est une base de $F^\perp = G$ car elle est génératrice de G et les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. On peut commencer par regarder s'il s'agit d'une base orthogonale (l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 étant nulle, on peut simplifier tous les termes impairs dans le calcul ci-dessous) :

$$\begin{aligned}
\langle P_1, P_2\rangle &= \int_{-1}^{1} (3t^2-1)(t^2+t-1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} (3t^4+3t^3-3t^2-t^2-t+1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} (3t^4-4t^2+1)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[\frac{3}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + t\right]_0^1 \quad \text{par parité} \\
&= 2\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{3} + 1\right) \\
&= \frac{8}{15} \neq 0
\end{aligned}$$

Appliquons le procédé de Gramm-Schmidt. Comme

$$\|P_1\|^2 = \int_{-1}^{1} (3t^2-1)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (9t^4-6t^2+1)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{9}{5}t^5 - 2t^3 + t\right]_0^1 = \frac{8}{5}$$

on pose $e_1 = \dfrac{P_1}{\|P_1\|} = \sqrt{\dfrac{5}{8}}(3X^2-1)$. Puis, on pose

$$\begin{aligned}
Q_2 &= P_2 - \langle e_1, P_2\rangle e_1 \\
&= P_2 - \frac{5}{8}\langle P_1, P_2\rangle P_1 \\
&= X^2 + X - 1 - \frac{5}{8}\frac{8}{15}(3X^2-1) \\
&= X^2 + X - 1 - X^2 + \frac{1}{3} \\
&= X - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Enfin, on calcule $\|Q_2\|$ grâce à

$$\|Q_2\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t - \frac{2}{3}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9}\right) \mathrm{d}t = 2\left[\frac{t^3}{3} + \frac{4}{9}t\right]_0^1 = \frac{14}{9}$$

On pose finalement $e_2 = \dfrac{Q_2}{\|Q_2\|} = \dfrac{3}{\sqrt{14}}\left(X - \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(3X-2)$. La famille (e_1, e_2) est alors une base orthonormée de $G = F^\perp$.

7. Puisque F vérifie $\mathbb{R}[X] = F \oplus F^\perp$, par le cours, la distance de X à F est donnée par

$$\mathrm{d}(X, F) = \|X - p_F(X)\| = \|p_{F^\perp}(X)\|$$

où $p_{F^\perp}$ désigne la projection orthogonale sur $F^\perp$. Comme (e_1, e_2) est une base orthonormée de $F^\perp$, il vient

$$\begin{aligned}
p_{F^\perp}(X) &= \langle e_1, X\rangle e_1 + \langle e_2, X\rangle e_2 \\
&= \frac{5}{8}\int_{-1}^{1}(3t^2-1)t\,\mathrm{d}t(3^2-1) + \frac{1}{14}\int_{-1}^{1}(3t-2)\,t\,\mathrm{d}t\,(3X-2) \\
&= 0 + \frac{2}{14}\left(X - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{14}}e_2
\end{aligned}$$

La distance recherchée vaut donc

$$\mathrm{d}(X,F) = \|\frac{2}{\sqrt{14}}e_2\| = \left|\frac{2}{\sqrt{14}}\right| \|e_2\| = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Correction de l'exercice 2

1. Pour tout $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, $\cos(x) \geq 0$ donc $f(x) = \cos(x)$. De même, pour tout $x \in [-\pi; -\pi/2] \cup [\pi/2; \pi]$, $\cos(x) \leq 0$ donc $f(x) = 0$, ce qui donne le graphe suivant par 2π-périodicité.
2. La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ en tant que maximum de deux fonctions continues (pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$) et paire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \max(\cos(-x), 0) = \max(\cos(x), 0) = f(x)$ par parité de cos. De plus, la restriction $f_{|]0;\pi/2[}$: $x \longmapsto \cos(x)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$ (par $x \longmapsto \cos(x)$), et la restriction $f_{|]\pi/2;\pi[}$: $x \longmapsto 0$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\pi/2; \pi]$ (par la fonction nulle). Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0; \pi]$, puis sur $[-\pi; \pi]$ par parité, et enfin sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. Le théorème de convergence normale permet d'en conclure que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$ donc f est égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
3. Puisque la fonction f est paire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ différent de 1,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)\cos(nx)\ x + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 0\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \text{ par parité de } x \longmapsto \cos(x)\cos(nx) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left(\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x)\right)\,\mathrm{d}x \text{ car } \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad 2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin((n+1)x) + \frac{1}{n-1}\sin((n-1)x)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n-1}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= -\frac{2\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(n^2-1)}
\end{aligned}$$

De plus, pour $n = 1$,

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left(\cos(2x) + \cos(0)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donc la série de Fourier de f est

$$\frac{a_0(f)}{2}C_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)C_n + b_n(f)T_n) = \frac{1}{\pi}C_0 - \sum_{n\geq 1}\frac{2\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(n^2-1)}C_n$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n : x \longmapsto \cos(nx)$ et $T_n : x \longmapsto \sin(nx)$.

4. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(x) - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi(n^2-1)}\cos(nx) \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(x) - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2\cos\left(2p\frac{\pi}{2}\right)}{\pi((2p)^2-1)}\cos(2px) \text{ car } \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ si } n \text{ impair} \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(x) - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^p}{\pi(4p^2-1)}\cos(2px)
\end{aligned}$$

En particulier, si l'on évalue ceci en $x = \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{4p^2-1}\cos(p\pi) \\
\Longleftrightarrow\quad & 0 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{4p^2-1}(-1)^p \\
\Longleftrightarrow\quad & \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut vérifier que les calculs sont justes en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle intervenant dans la somme et en faisant apparaître une série télescopique.

Puisque la fonction f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, l'égalité de Parseval-Bessel donne

$$\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi/2}\cos(x)^2\,\mathrm{d}x \text{ (toujours par parité)} \\
&= \int_0^{\pi/2}(\cos(2x)+1)\,\mathrm{d}t \text{ par linéarisation} \\
&= \left[\frac{\sin(2x)}{2} + x\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(4p^2-1)^2}\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3

1. Par propriétés de l'adjoint, $(u\circ u^*)^* = (u^*)^*\circ u^* = u\circ u^*$ donc $u\circ u^*$ est un endomorphisme symétrique. De plus, pour tout $x\in E$,

$$\langle u\circ u^*(x), x\rangle = \langle u(u^*(x)), x\rangle = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \|u^*(x)\|^2 \geq 0$$

donc $u\in S^+(E)$.

2. Puisque $u\circ u^*$ est autoadjoint, par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E formée de vecteurs propres de $u\circ u^*$. Notons, pour tout $k\in [\![1;n]\!]$, λ_k la valeur propre à laquelle est associé e_k. Soit $x\in E$, il existe $(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $x=\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k e_k$. Par suite,

$$\|u^*(x)\|^2 = \langle u\circ u^*(x), x\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k u\circ u^*(e_k), \sum_{j=1}^n x_j e_j\right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k\lambda_k e_k, \sum_{j=1}^n x_j e_j\right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$$

par calculs dans une base orthonormée. De même, en développant le produit scalaire par bilinéarité, ou en utilisant les résultats de cours en base orthonormée, $\|x\|^2=\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2$. Comme pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, $\lambda\leq\lambda_k\leq\mu$ et $x_k^2\geq 0$, il vient

$$\lambda\|x\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda x_k^2 \leq \|u^*(x)\|^2 \leq \sum_{k=1}^n \mu x_k^2 = \mu\|x\|^2.$$

Par ailleurs, $u\circ u^*$ est un endomorphisme symétrique positif, donc son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$, ce qui implique que $\lambda\geq 0$ et achève de démontrer l'inégalité demandée : $0\leq\lambda\|x\|^2$.

Correction de l'exercice 4

1. Soient $M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle f(M), N\rangle = \langle aMA, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^t(aMA)N) = a\,\mathrm{Tr}({}^tA{}^tMN) = a\,\mathrm{Tr}({}^tMN{}^tA) = \langle M, aN{}^tA\rangle$$

en ayant utilisé la linéarité de la trace et le fait que pour tout $(P,Q)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\mathrm{Tr}(PQ)=\mathrm{Tr}(QP)$. Ainsi, l'application $h:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $h(N)=aN{}^tA$ pour tout $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la définition de l'adjoint de f :

$$\forall M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \langle f(M),N\rangle = \langle M, h(N)\rangle$$

donc $h=f^*$ par unicité de l'adjoint.

2. On dispose des équivalences :

$$\begin{aligned}
f\in O(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \quad &\Longleftrightarrow \quad f\circ f^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\\
&\Longleftrightarrow \quad \forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad f(f^*(M)) = M\\
&\Longleftrightarrow \quad \forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad a(aM{}^tA)A = M\\
&\Longleftrightarrow \quad \forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad a^2M = M \text{ puisque } {}^tAA = I_n \text{ car } A\in O_n(\mathbb{R})\\
&\Longleftrightarrow \quad a^2 = 1 \text{ en ayant appliqué l'hypothèse à } M\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\\
&\Longleftrightarrow \quad a\in\{-1;1\}
\end{aligned}$$

3. (a) Dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = F \oplus F^\perp$, la matrice de s est diagonale avec pour diagonale $(1, -1, \ldots, -1)$, qui est symétrique. Par suite, s est autoadjoint. Comme la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel, on en déduit que A est aussi symétrique, ainsi $f^* : M \longmapsto M^t A = MA$ donc $f = f^*$ ce qui démontre que f est autoadjoint.

   (b) Par la question 2, f est un endomorphisme orthogonal. Ainsi, $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = f \circ f^* = f \circ f$ puisque f est aussi autoadjoint. On en déduit que f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$. Comme de plus les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétriques sont orthogonaux deux à deux, ceci entraîne que f est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$.

4. On peut remarquer (même si ce n'est pas demandé), que A correspond à la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation autour de l'axe dirigé et orienté par $u = (1, 0, 0)$ et d'angle orienté $\dfrac{2\pi}{3}$. En particulier,

$$A^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{Rot}_{u,4\pi/3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{Rot}_{u,6\pi/3}) = I_3.$$

   (a) La famille (I_3, A, A^2) est une famille génératrice de G. Commençons par vérifier que la famille (I_3, A, A^2) est orthogonale. On a :

$$\langle I_3, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^tI_3 A) = \mathrm{Tr}(A) = 0, \quad \langle I_3, A^2\rangle = \mathrm{Tr}(A^2) = 0 \quad \text{et} \quad \langle A, A^2\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAA^2) = \mathrm{Tr}(A) = 0$$

   De plus,

$$\|I_3\|^2 = \langle I_3, I_3\rangle = \mathrm{Tr}(I_3) = 3, \quad \|A\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \mathrm{Tr}(I_3) = 3 \quad \text{et} \quad \|A^2\|^2 = \mathrm{Tr}({}^t(A^2)A^2) = \mathrm{Tr}(I_3) = 3$$

   En posant $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, les matrices βI_3, βA et βA^2 sont de norme 1, donc la famille $\mathcal{G} = (\beta I_3, \beta A, \beta A^2)$ est une famille orthonormée de G. Elle est donc libre, et génératrice de G car la multiplication par un scalaire non nul ne change pas l'espace vectoriel engendré. Ainsi, $\mathcal{G}$ est une base orthonormée de G.

   (b) Le sous-espace vectoriel G est stable par f car $f(I_3) = -A$, $f(A) = -A^2$ et $f(A^2) = -I_3$. Comme f est un endomorphisme orthogonal de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, par le cours, l'endomorphisme induit par f sur G est orthogonal. On peut aussi le redémontrer en disant juste que f conserve la norme donc son endomorphisme induit sur G aussi.

   (c) Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base et les calculs effectués pour justifier la stabilité de G, on trouve directement

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (d) En développant par rapport à la colonne 3 par exemple, le déterminant de g, qui est égal à celui de T, vaut -1. Ainsi, g est un endomorphisme orthogonal indirect différent de $-\mathrm{Id}$ (car $T \neq -I_3$), donc il s'agit de la composée commutative d'une rotation r autour d'un axe D avec la réflexion par rapport au plan $D^\perp$.

   (e) L'axe de la rotation est déterminé par $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}_G)$ (qui est nécessairement de dimension 1). On peut voir que $g(I_3 + A + A^2) = -(I_3 + A + A^2)$ ainsi $I_3 + A + A^2$ est un élément non nul de D, donc

$D = \mathrm{Vect}(I_3 + A + A^2)$. Orientons cet axe par le vecteur unitaire $U = \dfrac{1}{\|I_3 + A + A^2\|}(I_3 + A + A^2)$. Notons θ l'angle orienté de la rotation r, on sait que

$$\mathrm{Tr}(g) = -1 + 2\cos(\theta) \qquad \text{d'où} \cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

ce qui entraîne que $\theta \equiv \pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Le signe de $\sin(\theta)$ est donné par le produit mixte de $[U, P, g(P)]$ pour $P \notin D$. Prenons par exemple $P = I_3$, alors comme $\mathcal{G}$ est une base orthonormée directe de G,

$$[U, P, g(P)] = \det_{\mathcal{G}}(U, I_3, -A) = \frac{3}{\|I_3 + A + A^2\|} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{\|I_3 + A + A^2\|} < 0$$

en développant par rapport à la seconde colonne par exemple. Finalement, $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$, ce qui achève de caractériser la composée g.