Les séries de Fourier constituent un outil fondamental d'approximation des fonctions périodiques, qu'il faut commencer par bien comprendre.

1 Fonctions périodiques

Definition 1 *On appelle période d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tout nombre réel T tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f(t+T) = f(t)\,.$$

On dit que f est périodique si elle admet une période non nulle, et plus précisément qu'elle est T-périodique si T est une période strictement positive.

Exercice 1 *Vérifier que l'ensemble des périodes d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Si de plus est f est continue et non constante, montrer que l'ensemble de ses périodes est de la forme $T\mathbb{Z}$ avec $T \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Une fonction T-périodique est entièrement déterminée par sa restriction à un intervalle semi-ouvert de longueur T, ce que l'on peut exprimer un termes algébriques comme suit.

Proposition 1 *L'ensemble*

$$\mathscr{F}_T := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,;\ \forall t \in \mathbb{R}\,,\ f(t+T) = f(t)\}$$

des fonctions T-périodiques est un espace vectoriel, de même que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{F}([a, a+T[)$ des fonctions $g : [a, a+T[\to \mathbb{C}$, et l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_T & \to & \mathscr{F}([a, a+T[) \\ f & \mapsto & f_{|[a,a+T[} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

En pratique, nous allons considérer des fonctions périodiques de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux.

Definition 2 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période T est dite de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux, pour un entier naturel k, si sa restriction $f_{|[0,T]}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux,* c'est-à-dire *s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[0, T]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles ouverts $]a_j, a_{j+1}[$ (pour $j \in \{0, \ldots, n-1\}$) admette un prolongement de classe $\mathscr{C}^k$.*

On rappelle qu'une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^0$ (par morceaux) si elle est *continue* (par morceaux). Dans la suite, on notera

- $\mathscr{C}^k_T$ l'espace vectoriel des fonctions T-périodiques de classe $\mathscr{C}^k$,
- $\mathscr{C}^k_{\mathrm{mcx},T}$ l'espace vectoriel des fonctions T-périodiques de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux.

Proposition 2 *Si g est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux sur un segment $[a, a+T]$, il existe une unique fonction f qui soit T-périodique, de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux et coïncidant avec g sur $[a, a+T[$.*

Démonstration. Pour $x = a + nT$ avec $n \in \mathbb{Z}$, on a nécessairement $f(x) = f(a) = g(a)$. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash(a + T\mathbb{Z})$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a + nT < x < a + (n + 1)T\,,$$

et on a nécessairement $f(x) = f(x - nT) = g(x - nT)$. La fonction ainsi obtenue est par construction T-périodique, et de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux comme g (pour qu'une fonction T-périodique soit de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux il suffit que sa restriction à un segment de longueur T soit de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux). □

Attention, si g est de classe $\mathscr{C}^k$, f reste seulement de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux en général.

Proposition 3 *Toute fonction périodique continue par morceaux est bornée.*

Démonstration. Pour montrer qu'une fonction T-périodique est bornée, il suffit de montrer qu'elle bornée sur $[0, T]$. Si f est continue par morceaux sur $[0, T]$, si $(a_0, \ldots, a_n)$ est une subdivision adaptée à f, la restriction de f à chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}[$, $j \in \{0, n - 1\}$, admet un prolongement continu $\widetilde{f}_j$ au segment $[a_j, a_{j+1}]$. Donc

$$|f(x)| \le \max\left(\max_{j\in\{0,\ldots,n\}} |f(a_j)|\,,\ \max_{j\in\{1,\ldots,n\}}\ \max_{t\in[a_j,a_{j+1}]} |\widetilde{f}_j(t)|\right) \quad \forall x \in [0, T]\,.$$

□

Proposition 4 *Toute fonction périodique continue est uniformément continue.*

Démonstration. Soit f une fonction T-périodique. Alors sa restriction au segment $[-T/2, 3T/2]$ est continue donc uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour $t, s \in [-T/2, 3T/2]$,

$$|t - s| \le \eta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(s)| \le \varepsilon\,.$$

Soient x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \le T/2$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - nT \in [0, T[$. Alors $y - nT \in [-T/2, 3T/2]$. Si de plus $|x - y| \le \eta$ alors

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - nT) - f(y - nT)| \le \varepsilon$$

puisque $|(x - nT) - (y - nT)| = |x - y| \le \eta$ et $x - nT$, $y - nT \in [-T/2, 3T/2]$. Ceci démontre que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. □

Proposition 5 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique et continue par morceaux. Alors pour tout réel a on a*

$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration. Par la *relation de Chasles*,

$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t\,.$$

La dernière intégrale vaut

$$\int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(s-T)\mathrm{d}s = \int_0^a f(s)\mathrm{d}s$$

par *changement de variables* (translation) et périodicité de f, c'est-à-dire l'opposé de la première. □

Étant données deux fonctions f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodiques et continue par morceaux, on note

$$\langle f|g\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t\,.$$

Proposition 6 *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^k_{\mathrm{mcx},T} \times \mathscr{C}^k_{\mathrm{mcx},T} & \to & \mathbb{C} \\ (f,g) & \mapsto & \langle f|g\rangle \end{array}$$

est sesquilinéaire[1] *hermitienne positive sur* $\mathscr{C}^k_{\mathrm{mcx},T}$.

Pour tout $f \in \mathscr{C}^k_{\mathrm{mcx},T}$, on note

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f|f\rangle}\,.$$

Proposition 7 *Si $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{mcx},T}$ est telle que $\|f\|_2 = 0$ alors f est nulle sauf peut-être sur un ensemble de points dont l'intersection avec $[0,T]$ est finie. Si $f \in \mathscr{C}^0_T$ est telle que $\|f\|_2 = 0$ alors f est nulle. L'espace $\mathscr{C}^0_T$ est préhilbertien.*

Proposition 8 *Quelles que soient f et $g \in \mathscr{C}^k_{\mathrm{mcx},T}$, on a*

Inégalité triangulaire **:** $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$,

Inégalité de Cauchy–Schwarz **:** $|\langle f|g\rangle| \leq \|f\|_2\,\|g\|_2$.

Désormais on choisit $T = 2\pi$, par commodité. Quel que soit $n \in \mathbb{Z}$ on note

$$E_n : t \mapsto \mathrm{e}^{int}\,,$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$C_n : t \mapsto \cos(nt)\,, \qquad S_n : t \mapsto \sin(nt)\,.$$

De façon cohérente, C_0 désignera la fonction constante égale à 1.

Proposition 9 *La famille de fonctions $\{E_n\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormée dans l'espace préhilbertien $\mathscr{C}^0_{2\pi}$. La famille $\{C_n\,;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{S_n\,;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est orthogonale dans $\mathscr{C}^0_{2\pi}$ et*

$$\|C_0\|_2 = 1\,,\ \|C_n\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \|S_n\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Definition 3 *On appelle polynôme trigonométrique*[2] *toute combinaison linéaire (finie) de la famille* $\{E_n\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

1. c'est-à-dire linéaire à droite, semi-linéaire à gauche
2. On devrait dire ≪ fonction polynôme trigonométrique ≫.

Proposition 10 *Soit P un polynôme trigonométrique. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que*

$$P = \sum_{n=-p}^{p} c_n E_n \,, \quad c_n := \langle E_n | P \rangle \,,$$

ce qui équivaut à

$$P = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n C_n + b_n S_n) \,, \quad a_n := c_n + c_{-n} = 2\langle C_n | P \rangle \,,\ b_n := i(c_n - c_{-n}) = 2\langle S_n | P \rangle \,.$$

On a de plus

$$\|P\|_2^2 = \sum_{n=-p}^{p} |c_n|^2 \ = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{p} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \,.$$

2 Séries trigonométriques

Definition 4 *On appelle* série trigonométrique *toute* série de fonctions Σu_n *où* u_n *est combinaison linéaire de* E_n *et* E_{-n} *quel que soit* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 11 *Les sommes partielles d'une série trigonométrique sont des polynômes trigonométriques.*

On notera souvent les séries trigonométriques comme des *séries bilatères* $\sum c_n E_n$, où il est entendu que l'indice n parcourt $\mathbb{Z}$: de même qu'une série « ordinaire » , une série bilatère $\sum z_n$ s'identifie à la *suite* de ses *sommes partielles* $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définies par

$$\sigma_n = \sum_{\ell=-n}^{n} z_\ell \,,$$

et on dit qu'une série bilatère converge si la suite de ses sommes partielles converge, auquel cas on note

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \ = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{\ell=-n}^{n} z_\ell \right) .$$

Proposition 12 *Une série trigonométrique $\sum c_n E_n$ est* normalement convergente *si et seulement si la série numérique $\sum(|c_n| + |c_{-n}|)$ converge, ou de façon équivalente, la série numérique $\sum_{n \geq 1}(|a_n| + |b_n|)$ définie par*

$$a_n := c_n + c_{-n} \,,\ b_n := i(c_n - c_{-n})$$

converge.

Démonstration. Par convergence normale de $\sum c_n E_n$ on entend que la série bilatère numérique $\sum \|c_n E_n\|_\infty = \sum |c_n|$ converge. Si c'est le cas, alors la suite des sommes partielles de la série $\sum(|c_n| + |c_{-n}|)$ est majorée par $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ donc $\sum(|c_n| + |c_{-n}|)$, série à termes positifs, converge. Réciproquement, la convergence de la série $\sum(|c_n| + |c_{-n}|)$ implique que la suite $(\sum_{\ell=-n}^{n} |c_\ell|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et comme elle est croissante, cette suite converge. Pour montrer l'équivalence entre la convergence de $\sum(|c_n| + |c_{-n}|)$ et celle de $\sum_{n \geq 1}(|a_n| + |b_n|)$, on utilise les relations

$$a_n = c_n + c_{-n} \,,\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \,, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \,,\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \,,$$

pour obtenir à l'aide de l'*inégalité triangulaire* :

$$|c_n| + |c_{-n}| \leq |a_n| + |b_n| \leq 2(|c_n| + |c_{-n}|)\,.$$

□

3 Coefficients de Fourier

Definition 5 *Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux, on définit ses* coefficients de Fourier *exponentiels par*

$$c_n(f) := \langle E_n | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

et ses coefficients de Fourier trigonométriques par

$$a_n(f) := 2\,\langle C_n | f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, \mathrm{d}t\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

$$b_n(f) := 2\,\langle S_n | f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, \mathrm{d}t\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Noter que $b_0(f) = 0$: il est défini par commodité afin d'avoir les relations

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)\,,\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))\,, \quad c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}\,,\ c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}\,,$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1
- *Si f est à valeurs* réelles, *ses coefficients trigonométriques $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont* tous réels.
- *Si f est* paire, *ses coefficients trigonométriques $b_n(f)$ sont* tous nuls.
- *Si f est* impaire, *ses coefficients trigonométriques $a_n(f)$ sont* tous nuls.

On peut décliner quelques propriétés algébriques des coefficients de Fourier.

Proposition 13 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux. On note $\overline{f}$ la fonction conjuguée, $\check{f} : t \mapsto f(-t)$ la fonction symétrique et pour $a \in \mathbb{R}$, $f_a : t \mapsto f(t+a)$ la fonction translatée Alors*

$$c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}\,, \quad c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)\,, \quad c_n(f_a) = \mathrm{e}^{ina}\, c_n(f)\,.$$

Proposition 14 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux. Ses coefficients de Fourier vérifient*

$$|c_n(f)| \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty\,.$$

Definition 6 *Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux, on définit sa* série de Fourier *comme la série trigonométrique $\sum c_n(f) E_n$, qu'on écrit souvent*[3]

$$\sum c_n(f) \mathrm{e}^{int}, \quad \textit{ou encore} \quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)).$$

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux, on notera $\mathsf{S}_p(f)$ les sommes partielles de sa série de Fourier pour $p \in \mathbb{N}$ (ne pas confondre S_n dans $\mathsf{S}_n(f)$ avec la notation S_n pour $\sin(nt)$, que l'on n'utilisera plus désormais) :

$$\mathsf{S}_p(f) : t \mapsto \sum_{n=-p}^{p} c_n(f) \mathrm{e}^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

Proposition 15 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux et $\mathsf{S}_p(f)$ les sommes partielles de sa série de Fourier. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f - \mathsf{S}_p(f)$ est orthogonal au* sous-espace vectoriel engendré *par $(E_n)_{|n| \leq p}$. Autrement dit, S_p est la* projection orthogonale *sur* Vect $\big((E_n)_{|n| \leq p}\big)$.

Démonstration. Par définition de $\mathsf{S}_p(f)$ et par linéarité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ par rapport à sa deuxième variable,

$$\langle E_m, f - \mathsf{S}_p(f) \rangle = \langle E_m, f \rangle - \sum_{|n| \leq p} \langle E_n, f \rangle \langle E_m, E_n \rangle = 0$$

puisque la famille $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. □

Corollaire 1 (*Inégalité de Bessel*) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux et $\mathsf{S}_p(f)$ les sommes partielles de sa série de Fourier. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$\|\mathsf{S}_p(f)\|_2 \leq \|f\|_2 .$$

En outre, la série bilatère $\sum |c_n(f)|^2$ et la série $\sum (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ convergent et l'on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \leq \|f\|_2^2 .$$

Démonstration. Puisque

$$f = f - \mathsf{S}_p(f) + \mathsf{S}_p(f), \quad f - \mathsf{S}_p(f) \perp \mathsf{S}_p(f),$$

on a

$$\|f\|_2^2 = \|f - \mathsf{S}_p(f)\|^2 + \|\mathsf{S}_p(f)\|^2 .$$

(En vertu du *théorème de Pythagore* dans l'espace $\mathscr{C}^k_{\mathrm{mcx},T}$ muni de $\langle \cdot | \cdot \rangle$!) La deuxième assertion provient du fait qu'une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. □

Noter que l'inégalité $|c_n(f)| \leq \|f\|_2$ de la Proposition 14 est une conséquence de l'inégalité de Bessel, cette dernière étant plus précise.

3. avec le même abus que pour les séries entières, sans flèche bien que ce soit une série de fonctions et non une série numérique

Corollaire 2 *Les coefficients de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et continue par morceaux tendent vers zéro à l'infini,* c'est-à-dire *que*

$$\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0\,, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0\,, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0\,.$$

Démonstration. Ceci vient du corollaire précédent et du fait que le terme général d'une série convergente tend vers zéro. □

Corollaire 3 (Lemme de Riemann-Lebesgue) *Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \;=\; 0\,.$$

Noter que ce passage à la limite sous le signe $\int$ ne se déduit pas des théorèmes « classiques » car la suite de fonctions $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge même pas simplement. Pour le démontrer, on remarque que grâce à la relation de Chasles, il suffit de le montrer pour $a < b < a + 2\pi$, et si c'est le cas on applique le corollaire 2 à la fonction 2π-périodique coïncidant avec f sur $[a, b]$ et nulle sur $]b, a + 2\pi[$.

Plus f est régulière, plus ses coefficients de Fourier tendent rapidement vers zéro, c'est l'objet du résultat suivant.

Proposition 16 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^k$ (pour $k \in \mathbb{N}$) alors ses coefficients de Fourier vérifient*

$$c_n(f) = o(1/|n|^k)\,, \quad |n| \to +\infty\,.$$

Démonstration. Par intégration par parties successives, on montre que

$$c_n(f^{(k)}) \;=\; (in)^k\, c_n(f)$$

et comme $c_n(f^{(k)})$ tend vers zéro lorsque $|n| \to +\infty$, on en déduit que $c_n(f) = o(1/|n|^k)$. □

Théorème 1 *Si une série trigonométrique $\sum \gamma_n E_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors sa somme f est continue, 2π-périodique, et ses coefficients de Fourier sont précisément $c_n(f) = \gamma_n$.*

Démonstration. La somme $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n E_n$ est continue comme limite uniforme d'une suite (celle des sommes partielles) de fonctions continues. Elle est 2π-périodique comme limite d'une suite de fonction 2π-périodiques. De plus ses coefficients de Fourier sont définis par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m \mathrm{e}^{imt}\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$$

et comme la série $\sum \gamma_n E_n$ converge uniformément, on peut intervertir $\int$ et $\sum$, ce qui donne

$$c_n(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \gamma_m \mathrm{e}^{i(m-n)t}\,\mathrm{d}t \;=\; \gamma_n\,.$$

□

4 Convergences des séries de Fourier

4.1 Convergence simple

Théorème 2 (Dirichlet) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. On suppose en outre que*

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0^-)}{t - t_0} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0^+)}{t - t_0}$$

ont une limite respectivement quand $t \nearrow t_0$ et quand $t \searrow t_0$, où $f(t_0^-)$ désigne la limite à gauche de f en t_0 et $f(t_0^+)$ sa limite à droite. Alors la série de Fourier de f converge en t_0 et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \mathrm{e}^{int_0} = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}\,.$$

Attention, si les valeurs des limites

$$\lim_{t \nearrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0^-)}{t - t_0} \quad \text{et} \quad \lim_{t \searrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0^+)}{t - t_0}$$

n'apparaissent pas dans la conclusion, l'existence de ces limites est cruciale dans la démonstration. Ces limites existent par exemple pour toutes les fonctions de *classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux*, auquel ce théorème s'applique donc. (Il est faux pour les fonctions « seulement » continues par morceaux en général.)

La démonstration repose sur les propriétés du « noyau de Dirichlet » données ci-dessous et sur le lemme de Riemann–Lebesgue.

Proposition 17 *Soit $p \in \mathbb{N}$ et $D_p := \sum_{n=-p}^{p} E_n$. Le polynôme trigonométrique D_p est à valeurs réelles, pair, et vérifie :*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_p = 1\,,$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \backslash \{2\pi\mathbb{Z}\}\,, \quad D_p(t) = \frac{\sin\left((p + \frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,,$$

$$\forall t \in 2\pi\mathbb{Z}\,, \quad D_p(t) = 2p + 1\,.$$

Démonstration. [Théorème de Dirichlet] On commence par observer que, par définition de D_p, puis grâce à sa parité et au fait qu'il soit de moyenne 1,

$$S_p(f)(t_0) - \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t_0+\theta) - f(t_0^+))\, D_p(\theta)\, \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t_0-\theta) - f(t_0^-))\, D_p(\theta)\, \mathrm{d}\theta\,.$$

Il s'agit de montrer que les deux intégrales ci-dessus tendent vers zéro lorsque $p \to +\infty$. Nous allons traiter la première, la démonstration étant analogue pour la seconde. La difficulté provient du fait que la suite de fonctions $(D_p)_{p \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément ni même simplement sur $[0, \pi]$. D'après l'expression explicite de D_p, on a

$$\int_0^{\pi} (f(t_0 + \theta) - f(t_0^+))\, D_p(\theta)\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} g(\theta)\, \sin\left((p + \tfrac{1}{2})\theta\right)\, \mathrm{d}\theta\,,$$

où g est la fonction continue par morceaux définie par

$$g(\theta) = \frac{f(t_0+\theta) - f(t_0^+)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,, \quad \text{si } \theta \in [-\pi,\pi]\backslash\{0\}\,,$$

$$g(0) = 2\lim_{\theta\searrow 0} \frac{f(t_0+\theta) - f(t_0^+)}{\theta}\,.$$

Comme

$$\sin\left((p+\tfrac{1}{2})\theta\right) \;=\; \sin(p\theta)\,\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \;+\; \cos(p\theta)\,\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\,,$$

on obtient donc grâce au lemme de Riemann–Lebesgue que

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^\pi g(\theta)\,\sin\left((p+\tfrac{1}{2})\theta\right)\,\mathrm{d}\theta \;=\; 0\,.$$

□

4.2 Convergence normale

Théorème 3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On suppose en outre qu'elle est continue. Alors la série de Fourier de f converge normalement et sa somme est f.*

Démonstration. Le fait que f soit classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux *et* continue implique que (la série bilatère numérique) $\sum c_n(f)$ converge absolument. En effet, si $(a_0,\ldots,a_p)$ est une subdivision de $[0,2\pi]$ adaptée à f, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{p-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}} \widetilde{f}_j(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\,,$$

avec $\widetilde{f}_j$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a_j,a_{j+1}]$, sachant que f et $\widetilde{f}_j$ coïncident sur $]a_j,a_{j+1}[$. Comme f est continue, on a de plus $\widetilde{f}_j(a_{j+1}) = \widetilde{f}_{j+1}(a_{j+1}) = f(a_{j+1})$. Ainsi, en intégrant par parties chaque intégrale, on obtient

$$c_n(f) = \frac{1}{2i\pi n}\sum_{j=0}^{p-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}} \widetilde{f}'_j(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \;+\; \frac{1}{2i\pi n}\sum_{j=0}^{p-1}[\widetilde{f}_j(t)\mathrm{e}^{-int}]_{a_j}^{a_{j+1}} \;=\; \frac{c_n(g)}{in}$$

où g est la fonction 2π-périodique continue par morceaux définie par

$$g(x) = \widetilde{f}'_j(x) \text{ si } \; x\in[a_j,a_{j+1}[\,.$$

La somme des « termes de bord » est nulle car

$$\sum_{j=0}^{p-1}[\widetilde{f}_j(t)\mathrm{e}^{-int}]_{a_j}^{a_{j+1}} \;=\; \sum_{j=0}^{p-1}(\widetilde{f}_j(a_{j+1})\mathrm{e}^{-ina_{j+1}} \;-\; \widetilde{f}_j(a_j)\mathrm{e}^{-ina_j}) \;=$$

$$\widetilde{f}_{p-1}(a_p)\mathrm{e}^{-ina_p} \;-\; \widetilde{f}_0(a_0)\mathrm{e}^{-ina_0} \;+\; \sum_{j=1}^{p-2}(\widetilde{f}_j(a_{j+1}) - \widetilde{f}_{j+1}(a_{j+1}))\,\mathrm{e}^{-ina_{j+1}} \;=\; f(2\pi)\mathrm{e}^{-2i\pi n} \;-\; f(0) \;=\; 0\,.$$

Par suite,

$$|c_n(f)| \le \frac{|c_n(g)|}{|n|} \le |c_n(g)|^2 \;+\; \frac{1}{4|n|^2}\,,$$

donc la série $\sum |c_n(f)|$ converge comme somme de deux séries convergentes. Enfin, d'après le théorème de Dirichlet et puisque f est continue, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \mathrm{e}^{int} = f(t)\,.$$

$\square$

Attention, la continuité de f est cruciale dans ce théorème.

4.3 Convergence en moyenne quadratique

Théorème 4 (Parseval) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Alors la suite des sommes partielles $(\mathsf{S}_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ de la série de Fourier de f est telle que*

$$\lim_{p\to+\infty} \|\mathsf{S}_p(f) \; - \; f\|_2 = 0\,,$$

et

$$\lim_{p\to+\infty} \|\mathsf{S}_p(f)\|_2^2 \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \;=\; \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \;=\; \|f\|_2^2\,.$$

La démonstration repose sur le résultat d'approximation suivant.

Théorème 5 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que*

$$\|f - P\|_2 \leq \varepsilon\,.$$

Démonstration. On procède en trois étapes.

1) Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue 2π-périodique et *affine par morceaux* telle que

$$\|f - g\|_2 \leq \varepsilon\,.$$

(Attention, ce serait faux avec la norme ∞ !) Pour la construire, on commence par « approcher » f par une fonction φ *en escalier* et 2π-périodique : grâce à la continuité uniforme de toute fonction continue sur un segment, on peut en effet trouver une fonction en escalier 2π-périodique telle que

$$\|f - \varphi\|_\infty \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

(Ici, $\|f\|_\infty$ signifie $\max\{|f(t)|\,;\; t \neq a_k\,,\, k = 0,\dots,n\}$ si $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ est une subdivision adaptée à f.) Puis on « régularise » φ en posant, si $(a_0,\dots,a_n)$ est une subdivision adaptée à φ et si $\alpha > 0$ est strictement inférieur à la moitié du *pas* de cette subdivision,

$$g(t) \;=\; \begin{cases} \varphi(t)\,(t-a_j)/\alpha\,, & \text{si } t \in [a_j, a_j+\alpha]\,,\\ \varphi(t)\,, & \text{si } t \in [a_j+\alpha, a_{j+1}-\alpha]\,,\\ \varphi(t)\,(a_{j+1}-t)/\alpha\,, & \text{si } t \in [a_{j+1}-\alpha, a_{j+1}]\,. \end{cases}$$

Le calcul montre que

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(t) - g(t)|^2 \mathrm{d}t \;\leq\; 2\,\alpha\, n\, \|\varphi\|_\infty^2\,.$$

Quitte à diminuer α, on peut donc supposer que

$$\|\varphi - g\|_2 \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\,.$$

Finalement, on a par l'inégalité triangulaire

$$\|f - g\|_2 \leq \|f-\varphi\|_2 + \|\varphi - g\|_2 \leq \|f-\varphi\|_\infty + \|\varphi - g\|_2 \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

(Rappelons que $\|u\|_2 \leq \|u\|_\infty$ avec notre définition de $\|u\|_2$, la *moyenne quadratique* de u.)

2) La fonction g étant continue 2π-périodique et affine par morceaux, elle est limite uniforme des sommes partielles de sa série de Fourier (d'après le théorème 3). Donc il existe un polynôme trigonométrique P tel que

$$\|g - P\|_\infty \leq \varepsilon\,.$$

Finalement, par l'inégalité triangulaire on a

$$\|f-P\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-P\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-P\|_\infty \leq 3\varepsilon\,.$$

□

Démonstration. [Théorème de Parseval] Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un polynôme trigonométrique P tel que

$$\|f-P\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ainsi on a par l'inégalité triangulaire, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathsf{S}_p(f) - f\|_2 \leq \|\mathsf{S}_p(f) - \mathsf{S}_p(P)\|_2 + \|\mathsf{S}_p(P) - P\|_2 + \|P - f\|_2 \leq \|\mathsf{S}_p(P) - P\|_2 + 2\,\|P - f\|_2$$

d'après l'inégalité de Bessel. Or comme P est un polynôme trigonométrique, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$, $\mathsf{S}_p(P) = P$, d'où

$$\|\mathsf{S}_p(f) - f\|_2 \leq \varepsilon\,.$$

Ceci prouve la première assertion, et implique la deuxième car

$$\lim_{p\to+\infty} \|\mathsf{S}_p(f) - f\|_2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{p\to+\infty} \|\mathsf{S}_p(f)\|_2 = \|f\|_2\,.$$

□

Exercice 2 *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique telle que $f(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi, \pi]$. En déduire les égalités suivantes, respectivement à l'aide du théorème de Dirichlet et à l'aide du théorème de Parseval :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$