1 Introduction

Definition 1 *On appelle* série entière[1] *de* coefficients $a_n \in \mathbb{C}$ *et on note* $\sum a_n z^n$ *la série de fonctions polynomiales*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & a_n z^n \,. \end{array}$$

Remarque 1 *On note de la même façon la série entière* $\sum a_n z^n$*, qui est une série de fonctions, et à* z *fixé, la* série numérique $\sum a_n z^n$*. Seul le contexte permet de savoir de quoi on parle.*

Remarque 2 *Bien entendu, comme pour toutes les séries, la notation* $\sum a_n z^n$ *ne présage en aucune façon de la convergence de la série en question.*

Vous avez déjà rencontré des séries entières sans le savoir, comme par exemple $\sum z^n$, $\sum z^n/n!$, etc.

Definition 2 (Opérations formelles) *Soient deux séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$*.*
- *La* série somme *de* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *est* $\sum s_n z^n$ *avec* $s_n = a_n + b_n$ *quel que soit* $n \in \mathbb{N}$*.*
- *La* série produit *de* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *est* $\sum p_n z^n$ *avec, quel que soit* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \,.$$

- *La* série dérivée *de* $\sum a_n z^n$ *est* $\sum d_n z^n$ *avec* $d_n = (n+1)a_{n+1}$ *quel que soit* $n \in \mathbb{N}$*.*
- *Une* série primitive *de* $\sum a_n z^n$ *est de la forme* $\sum A_n z^n$ *avec* $A_n = a_{n-1}/n$ *quel que soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *(et* A_0 *arbitraire).*

Exercice 1 *Calculer le produit de la série entière* $\sum z^n$ *avec elle-même. Calculer la série dérivée de la série entière* $\sum z^n/n!$*.*

2 Rayon de convergence

Lemme 1 (Abel) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*. S'il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la suite complexe* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit bornée, alors quel que soit* $z \in \mathbb{C}$ *de* module $|z| < |z_0|$*, la série numérique* $\sum a_n z^n$ converge absolument*.*

Démonstration. Si $z_0 = 0$ il n'y a rien à démontrer. Si $z_0 \neq 0$ et $|a_n z_0^n| \leq C$ alors $|a_n z^n| \leq C|z/z_0|^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| < |z_0|$ la *série géométrique* $\sum |z/z_0|^n$ converge, et donc par comparaison la série à termes réels positifs $\sum |a_n z^n|$ converge. □

Corollaire 1 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*. S'il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la série numérique* $\sum a_n z_0^n$ *converge, alors la série numérique* $\sum a_n z^n$ *converge absolument quel que soit* $z \in \mathbb{C}$ *de module* $|z| < |z_0|$*.*

Démonstration. Si une série converge, son *terme général* tend vers zéro et il est donc borné. □

Definition 3 *On appelle* rayon de convergence *d'une série entière* $\sum a_n z^n$

1. Se dit « power series » en anglais, c'est-à-dire série de puissances, comme dans beaucoup d'autres langues.

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

- *$R = +\infty$ si l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}^+ \,;$ la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$ (qui contient 0) n'est pas majoré,*
- *et s'il est majoré, $R := \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \,;$ la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$.*

La série entière $\sum z^n/n!$ est un exemple pour lequel le rayon de convergence est infini, nous en reparlerons.

Remarque 3 *L'ensemble $\{r \in \mathbb{R}^+ \,;$ la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$ est un* intervalle *(puisque $0 \leq s \leq r$ implique $0 \leq |a_n s^n| \leq |a_n r^n|$). S'il n'est pas majoré cet ensemble est donc $\mathbb{R}^+$ tout entier.*

Dans l'énoncé ci-dessous, on note pour simplifier $\sup A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la borne supérieure de A si A est majoré et $+\infty$ sinon.

Proposition 1 *Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \,;\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\}\,.$$

Démonstration. Notons $I := \{r \in \mathbb{R}^+ \,;$ la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$ et

$$A := \{r \in \mathbb{R}^+ \,;\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\}\,.$$

On a $A \subset I$ et donc $\sup A \leq \sup I$. Pour montrer que $\sup A \geq \sup I$, prenons $r \in I$. Alors $[0, r[\subset A$ (pour la même raison que dans le lemme d'Abel : si $|a_n r^n| \leq C$ et $0 \leq s < r$ alors $|a_n s^n| \leq C(s/r)^n$ tend vers zéro), et donc $r \leq \sup A$. Ceci étant vrai quel que soit $r \in I$, on en déduit $\sup I \leq \sup A$. □

Exercice 2 *Montrer que le rayon de convergence de $\sum z^n$ est égal à 1, de même que celui de $\sum z^n/n$, $\sum z^n/n^2$, $\sum n^{(-1)^n} z^n$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum n^n z^n$ est nul.*

Théorème 1 *Si R est le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$,*
- *quel que soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument,*
- *quel que soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge.*

Démonstration. Si $|z| < R$, soit $r \in]|z|, R[$: $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument d'après le lemme d'Abel. Si $|z| > R$ alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, et par conséquent la la série numérique $\sum a_n z^n$ *diverge grossièrement* (c'est-à-dire que son terme général ne tend pas vers zéro). □

Remarque 4 *Par contraposition dans le théorème ci-dessus,*
- *si $\sum |a_n z^n|$ diverge alors $|z| \geq R$,*
- *si $\sum a_n z^n$ converge alors $|z| \leq R$.*

Remarque 5 *Le cas des nombres complexes de module exactement égal au rayon de convergence est indéterminé en général. Par exemple, si $|z| = 1$ la série numérique $\sum z^n$ diverge, tandis que $\sum z^n/n^2$ converge. Quant à $\sum z^n/n$, elle diverge pour $z = 1$, et elle converge pour $|z| = 1$ et $z \neq 1$ (ceci se démontre par* transformation d'Abel*).*

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

Definition 4 *On appelle disque de convergence d'une série entière le disque ouvert centré en 0 et de rayon R, son rayon de convergence. On appelle cercle de convergence*[2] *le cercle centré en 0 et de rayon R.*

Proposition 2 (*Règle de d'Alembert*) *Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang N, et si la suite $(|a_{n+1}/a_n|)_{n\geq N}$ a pour limite $\ell \in [0,+\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $1/\ell$, avec par convention $1/+\infty = 0$, $1/0 = +\infty$.*

Démonstration. Puisque

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \ell|z|$$

pour $z \neq 0$, la conclusion découle de la règle de d'Alembert pour les séries numériques : si $\ell|z| < 1$ la série numérique $\sum |a_n z^n|$ converge et donc $|z| \leq R$, tandis que si $\ell|z| > 1$ la série numérique $\sum |a_n z^n|$ diverge et donc $|z| \geq R$; ces implications montrent respectivement que $1/\ell \leq R$ et $1/\ell \geq R$. □

Pour $a_n = 1/n!$ par exemple, $\ell = 0$ et le rayon de convergence de $\sum z^n/n!$ est donc bien $+\infty$ comme on l'a dit plus haut. Dans certains cas, on peut conclure même si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une infinité de termes nuls, c'est le cas ci-dessous.

Exercice 3 *Montrer en utilisant la règle de d'Alembert pour les séries numériques que le rayon de convergence de $\sum z^{n^2}/(n+1)$ est égal à 1.*

Proposition 3 (*Règle de Cauchy*) *Si la suite $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in [0,+\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $1/\ell$ (avec la convention $1/+\infty = 0$ et $1/0 = +\infty$).*

Démonstration. Puisque

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \ell|z|$$

pour $z \neq 0$, la conclusion découle de la règle de Cauchy pour les séries numériques (avec le même raisonnement que pour la règle de d'Alembert). □

Exercice 4 *Montrer à l'aide de la règle de Cauchy que le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n/n^{\ln n}$ est égal à 1.*

La suite $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ n'ayant pas nécessairement de limite, il peut être utile d'avoir recours au résultat plus général suivant.

Proposition 4 (Règle de Cauchy-Hadamard) *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}(\sqrt[n]{|a_n|})}.$$

2. Attention, la remarque ci-dessus montre que ce terme peut prêter à confusion : rien ne dit que la série entière converge sur le « cercle de convergence ».

Démonstration. Si $0 < r < R$ alors il existe $C > 0$ tel que $|a_n r^n| \leq C$ quel que soit n. Par suite, $\sqrt[n]{|a_n|}r \leq \sqrt[n]{C}$ et donc en passant à la *limite sup* (puisque $(\sqrt[n]{C})$ converge vers 1), $\overline{\lim}(\sqrt[n]{|a_n|}) \leq 1/r$. Ceci étant vrai quel que soit $r \in]0, R[$, on en déduit $\overline{\lim}(\sqrt[n]{|a_n|}) \leq 1/R$. Pour montrer l'égalité, raisonnons par l'absurde et supposons que $\overline{\lim}(\sqrt[n]{|a_n|}) < 1/R$. Soit alors r tel que $\overline{\lim}(\sqrt[n]{|a_n|}) < 1/r < 1/R$. Par définition de la limite sup, ceci implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/r$. Donc $(|a_n r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par 1 pour $n \geq N$), ce qui contredit le fait que r soit strictement supérieur au rayon de convergence R. □

Exercice 5 *Montrer à l'aide de la règle de Cauchy-Hadamard que le rayon de convergence de la série entière $\sum n^n z^{n^2}$ est égal à 1.*

Proposition 5 *Le rayon de convergence de la somme de deux séries entières est supérieur ou égal au plus petit de leurs rayons de convergence. Il est égal au plus petit des deux s'ils sont différents.*

Démonstration. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si $r < \min(R_a, R_b)$ alors la suite $((a_n + b_n)r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée comme somme de deux suites bornées. Donc le rayon de convergence de $\sum(a_n + b_n)z^n$ est $R \geq r$. Ceci étant vrai quel que soit $r < \min(R_a, R_b)$, on en déduit $R \geq \min(R_a, R_b)$. Si $R_a < R_b$ par exemple, si $R_a < r < R_b$, la suite $((a_n + b_n)r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée comme somme d'une suite bornée et d'une suite non bornée, donc $r \geq R$. Ceci étant vrai quel que soit $r \in]R_a, R_b[$, on en déduit $R_a \geq R$, et donc finalement $R = R_a$. □

Proposition 6 *Le rayon de convergence du produit de deux séries entières est supérieur ou égal au plus petit de leurs rayons de convergence.*

La démonstration repose sur le résultat suivant concernant les séries numériques.

Lemme 2 *Si deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont* absolument convergentes*, la* série produit *(*produit de Cauchy*) $\sum w_n$ définie par*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

est absolument convergente.

Démonstration. Pour montrer que $\sum w_n$ est absolument convergente il suffit de montrer que la suite des *sommes partielles* de $\sum |w_n|$ est majorée. Or

$$\sum_{k=0}^{n} |w_k| = \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{p=0}^{k} u_p v_{k-p} \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{k} |u_p||v_{k-p}| = \sum_{p=0}^{n} |u_p| \sum_{q=1}^{n-p} |v_q| \leq \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_p| \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |v_q| \right) .$$

□

Sous les hypothèses du lemme on montre même que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) .$$

Remarque 6 *Le produit de deux séries convergentes (et non absolument convergentes) n'est pas convergent en général : par exemple pour $u_n = v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, la série produit est grossièrement divergente.*

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

Démonstration. [de la proposition 6] Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si $|z| < \min(R_a, R_b)$ alors les deux séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes (d'après le lemme d'Abel), donc la série produit $\sum c_n z^n$ est absolument convergente d'après le lemme 2 ci-dessus. Donc le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$. □

Théorème 2 *Le rayon de convergence d'une série entière et de sa série dérivée sont égaux.*

Démonstration. Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R, et soit $\sum d_n z^n$ sa série dérivée, de rayon de convergence R'. Rappelons que $d_n = (n+1)a_{n+1}$ et considérons

$$A := \{r \in \mathbb{R}^+ \,;\ \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}\,,$$

$$D := \{r \in \mathbb{R}^+ \,;\ \text{la suite } (d_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}\,.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in \mathbb{R}^+$,

$$|a_{n+1} r^{n+1}| = \frac{r}{n+1}\,|d_n r^n|\,,$$

on a $D \subset A$ et donc $R' \leq R$. Pour montrer l'inégalité opposée, prenons $r + h \in A$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $h > 0$. Alors par la formule de Newton on a :

$$(n+1) r^n h \leq (r+h)^{n+1}\,,$$

d'où

$$|d_n r^n| \leq \frac{1}{h}\,|a_{n+1}(r+h)^{n+1}|\,,$$

ce qui montre que $r \in D$ et donc $r \leq R'$. Or, quel que soit $r < R$ il existe $h > 0$ tel que $r + h \in A$ (il suffit de prendre $h \leq (R-r)/2$), donc $r \leq R'$ d'après ce qui précède. On en déduit finalement que $R \leq R'$. □

3 Propriétés de la somme

Definition 5 *On appelle* somme d'une série entière *$\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ la fonction*

$$\begin{array}{rcl} D(0;R) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\,, \end{array}$$

où $D(0;R)$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon R. On restreint parfois cette fonction à l'intervalle $]-R,R[$ en considérant la fonction d'une variable réelle

$$\begin{array}{rcl}]-R,R[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\,. \end{array}$$

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

3.1 Opérations algébriques

Proposition 7 *Soient des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Soient s_n et p_n les coefficients de leur somme et de leur produit. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n ,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) .$$

Démonstration. Ces égalités proviennent des résultats sur la somme et le produit de séries numériques absolument convergentes. Celui sur la somme est immédiat. Démontrons maintenant celui sur le produit (mentionné plus haut). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes et leur série produit $\sum w_n$ définie par

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} .$$

Le lemme 2 a déjà montré que $\sum w_n$ était absolument convergente. Il s'agit de vérifier que la somme de la série produit est égale au produit des sommes, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) .$$

Observons tout d'abord que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{n} v_q\right)\right) ,$$

puis raisonnons avec des *sommes doubles* (notées avec le même symbole Σ que les sommes simples) :

$$\sum_{k=0}^{n} w_k - \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{n} v_q\right) = \sum_{p+q\le n} u_p v_q - \sum_{p\le n, q\le n} u_p v_q = \sum_{p+q\ge n+1, p\le n, q\le n} u_p v_q ,$$

d'où (faire un dessin)

$$\left|\sum_{k=0}^{n} w_k - \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{n} v_q\right)\right| \le \sum_{p\le n, q\le n} |u_p||v_q| - \sum_{p\le n/2, q\le n/2} |u_p||v_q| .$$

Le membre de droite ci-dessus est la différence entre les termes d'indice n et d'indice $n/2$ (si n est pair, $(n-1)/2$ sinon) d'une suite convergente (comme produit de deux suites convergentes par hypothèse). Donc il tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. $\square$

3.2 Continuité

Lemme 3 *Une série entière* converge normalement *(et donc uniformément) sur tout disque* fermé*, et plus généralement sur tout* compact*, inclus dans son disque de convergence.*

Démonstration. Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R, et soit $r < R$. Alors la série numérique $\sum a_n r^n$ converge absolument (d'après le théorème 1). Comme pour $|z| \le r$ on a $|a_n z^n| \le |a_n r^n|$, ceci montre que $\sum a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D(0;r)}$, le disque fermé de rayon r et centré en zéro. On conclut en observant que pour tout compact K inclus dans $D(0;R)$ il existe $r < R$ tel que $K \subset \overline{D(0;r)}$: en effet, l'application continue $z \mapsto |z|$ atteint son maximum sur K. (Si K est un disque fermé $\overline{D(z_0;r_0)}$ il suffit grâce à l'inégalité triangulaire de prendre $r = |z_0| + r_0$.) □

Remarque 7 *La convergence uniforme n'a pas lieu sur le disque de convergence lui-même en général. Par exemple, la série entière $\sum z^n$ ne converge pas uniformément sur le disque unité, puisque z^n ne tend pas uniformément vers zéro sur le disque unité. Si une série entière converge uniformément sur son disque de convergence $D(0;R)$ avec $R < +\infty$ alors elle converge même uniformément sur le disque fermé $\overline{D(0;R)}$ (conséquence du* critère de Cauchy uniforme *et de la continuité des fonctions polynomiales). S'il existe un point du cercle de convergence $C(0;R)$ d'une série entière où celle-ci converge* absolument*, alors elle converge normalement sur $\overline{D(0;R)}$.*

Proposition 8 *La somme d'une série entière est continue dans son disque de convergence.*

C'est une conséquence du lemme 3 ci-dessus et du théorème de continuité de la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues (ici, des fonctions polynomiales).

Corollaire 2 *La somme d'une série entière de rayon de convergence non nul admet un* développement limité *à tout ordre au voisinage de zéro. Plus précisément, si $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ alors*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \, + \, O(z^{n+1})\,, \; z \to 0\,.$$

Démonstration. Pour $|z| < R$ (rayon de convergence) on a

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \, + \, f_n(z)\, z^{n+1}\,,$$

où f_n est la somme de la série entière « tronquée » $\sum_m a_{m+n+1} z^m$, qui a aussi pour rayon de convergence R et est donc continue en zéro. □

Attention, sauf à savoir que la série entière converge *absolument* en un point de son cercle de convergence, on ne sait rien en général de la continuité de sa somme au bord du disque de convergence. Cependant, on peut montrer grâce à la transformation d'Abel le résultat suivant.

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

Théorème 3 (Abel-Dirichlet) *Soit S la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$. On suppose qu'il existe z_0 de module R tel que $\sum a_n z_0^n$ converge. Alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$, et par conséquent*

$$\lim_{t \nearrow 1} S(tz_0) = S(z_0)\,.$$

Démonstration. Sans surprise, on va utiliser la « *transformation d'Abel* ». Tout d'abord, on remarque qu'il suffit de savoir traiter le cas $R = z_0 = 1$: en effet, sous les hypothèses du théorème, la série entière $\sum \widetilde{a}_n z^n$ définie par $\widetilde{a}_n := a_n z_0^n$ vérifie ces même hypothèses avec $R = z_0 = 1$; si l'on sait montrer que $\sum \widetilde{a}_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ et que

$$\lim_{t \nearrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{a}_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{a}_n\,,$$

alors on en déduit les propriétés analogues pour $\sum a_n z^n$. En oubliant les tildas, on suppose donc désormais $R = z_0 = 1$. Pour montrer que $\sum a_n t^n$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$, il s'agit de montrer que cette série vérifie le critère de Cauchy uniforme. Notons

$$s_{n,p}(t) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k t^k\,, \quad \sigma_{n,p} = s_{n,p}(1)\,.$$

On a alors

$$s_{n,p}(t) = a_{n+1} t^{n+1} + \sum_{k=2}^{p} a_{n+k} t^{n+k} = \sigma_{n,1} t^{n+1} + \sum_{k=2}^{p} (\sigma_{n,k} - \sigma_{n,k-1}) t^{n+k}$$

$$= \sigma_{n,p} t^{n+p} + \sum_{k=1}^{p-1} \sigma_{n,k} t^{n+k} (1 - t)\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum a_n$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $|\sigma_{n,p}| \leq \varepsilon/2$. On a donc, pour tout $n \geq N$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|s_{n,p}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\Big(1 + (1 - t) \sum_{k=1}^{p-1} t^{n+k}\Big)\,.$$

Or

$$(1 - t) \sum_{k=1}^{p-1} t^{n+k} = t^{n+1}(1 - t^{p-1}) \leq 1\,, \quad \forall t \in [0, 1]\,.$$

Donc $|s_{n,p}(t)| \leq \varepsilon$ comme on le voulait.

□

Remarque 8 *Il est possible que $\lim_{t \nearrow 1} S(tz_0)$ existe sans que la série $\sum a_n z_0^n$ converge. C'est le cas par exemple pour $a_n = (-1)^n$ et $z_0 = 1$, puisque*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \to \frac{1}{2}\,,\ z \to 1\,.$$

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

3.3 Dérivabilité

Proposition 9 *La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Plus précisément, si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ alors la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f : &]-R, R[& \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n , \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Démonstration. On commence par démontrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ puis on raisonne par récurrence. D'après le théorème 2, la série dérivée a pour rayon de convergence R, et d'après le lemme 3, cette série converge normalement sur tout compact de $]-R, R[$. Donc d'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, f est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n .$$

□

Proposition 10 *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$, f sa somme, et g la somme de la série dérivée*[3]*. Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $|\varphi(t)| < R$ pour tout $t \in I$, alors la fonction $f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $g \circ \varphi \times \varphi'$.*

Démonstration. Si l'on note $f_n(t) = a_n(\varphi(t))^n$, on a $f_n'(t) = n a_n (\varphi(t))^{n-1}$, les hypothèses montrent que les séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum f_n'$ convergent normalement sur tout compact de I. □

3.4 Intégration

Proposition 11 *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ et f sa somme. Quel que soit le segment $[a, b] \subset]-R, R[$ on a*

$$\int_a^b f(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b t^n \mathrm{d}t .$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème d'intégration des séries de fonctions car $\sum a_n t^n$ converge uniformément sur le segment $[a, b]$. □

Proposition 12 *Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ et f sa somme. Alors les primitives de f sur $]-R, R[$ sont les sommes des séries primitives de $\sum a_n z^n$.*

3. qui coïncide avec f' sur $]-R, R[$ d'après la proposition précédente

4 Exponentielle complexe

Rappelons que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n/n!$ est infini, ce qui implique qu'elle converge absolument uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

On voit que $\exp(0) = 1$, et d'après la proposition 10, la fonction $t \mapsto \exp(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à elle-même. Autrement dit, la fonction $u = \exp_{|\mathbb{R}}$ est solution du problème

$$u' = u,\ u(0) = 1\,,$$

dont on sait que l'unique solution est la fonction exponentielle réelle $x \mapsto e^x$, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\,.$$

Par suite, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x\,.$$

Désormais, on note indifféremment $\exp(z)$ ou e^z. La fonction exponentielle complexe est continue sur $\mathbb{C}$.

4.1 Propriétés algébriques

Proposition 13 *1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}\,.$$

2. Quels que soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}\,.$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}\,.$$

Démonstration. 1) On utilise le fait que la conjugaison et la sommation d'une série commutent, et que

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n$$

2) D'après le résultat sur la série produit d'une série numérique montré pour la proposition 7, on a

$$\mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(z_1, z_2)\,,$$

où

$$p_n(z_1, z_2) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\,\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n$$

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

d'après la *formule du binôme*.
3) D'après 1) et 2), quel que soit $z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z|^2 = e^z\,\overline{e^z} = e^z\,e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}},$$

d'où

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z}.$$

□

Remarque 9 *On a utilisé ci-dessus le fait que* $e^{2x} = (e^x)^2$ *lorsque* x *est réel (en l'occurrence pour* $x = z + \overline{x}$*), mais cette formule est vraie aussi pour les nombres complexes. Plus généralement, on a*

$$\forall z \in \mathbb{C}\,, \forall m \in \mathbb{Z}\,,\ e^{mz} = (e^z)^m\,.$$

Ceci se démontre par récurrence à l'aide de 2) (on commence par les entiers naturels, et on remarque que $e^{-z} = (e^z)^{-1}$ *se déduit de 2) et du fait que* $e^0 = 1$*). Attention toutefois à ne pas généraliser cette formule de façon abusive(comme on va le (re)voir ci-après,* $e^{2i\pi x}$ *est différent de* $(e^{2i\pi})^x = 1$ *lorsque* $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ *!).*

Théorème 4 *La fonction* exp *définit un* morphisme surjectif *du* groupe *additif* $\mathbb{C}$ *sur le groupe multiplicatif* $\mathbb{C}^*$*.*

Démonstration. La propriété de morphisme découle de la proposition 13 2) et du fait que $e^0 = 1$. Pour démontrer sa surjectivité, nous allons utiliser des arguments d'analyse. Fixons $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ (le cas des réels strictement négatifs sera traité après coup) et considérons la fonction (affine) $f : t \in [0,1] \mapsto f(t) = 1 - t + tz_0$. Elle est à valeurs dans le segment d'extrémités z_0 et 1, qui ne contient pas zéro puisqu'on a supposé $z \notin \mathbb{R}^-$. On peut donc définir

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & g(t) := \int_0^t \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t\,. \end{array}$$

Elle est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée f'/f, et $\exp\circ(-g)$ aussi, de dérivée $-\exp\circ(-g)\times f'/f$ (d'après la proposition 10). Par suite, la fonction $f \times \exp\circ(-g)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et dérivée identiquement nulle sur le segment $[0,1]$. Donc, d'après le *théorème des accroissements finis*, cette fonction est constante. L'égalité

$$f(0) \times e^{-g(0)} = f(1) \times e^{-g(1)}$$

donne $z_0 = e^{g(1)}$. Ce résultat d'applique en particulier à i : il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $i = e^w$ (pour l'instant, on n'est pas censé savoir que $w = i\pi/2$ convient !), d'où $-1 = e^{2w}$. Si $z_0 \in \mathbb{R}^{-*}$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $-z_0 = e^x$ (d'après ce que l'on sait sur l'exponentielle réelle, mais un complexe fourni par le résultat précédent nous suffirait), et donc $z_0 = e^{x+2w}$. □

4.2 Nombres complexes de module 1

D'après la proposition 13-3), on a $|e^z| = 1$ si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$. Comme d'après le théorème 4 tout nombre complexe a un *antécédent* par exp, l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est exactement

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta}\,;\ \theta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Cet ensemble est un groupe multiplicatif.

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

Théorème 5 *La fonction $u : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}$ est un morphisme continu surjectif du groupe additif $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$. Son noyau est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On définit le nombre π par*

$$\mathrm{Ker}\ u = 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

Démonstration. La continuité et la surjectivité se déduisent de celle de l'exponentielle (par composition avec la fonction *linéaire* $\theta \mapsto i\theta$). Le noyau de u est donc un *sous-groupe* fermé de $(\mathbb{R}, +)$. Il est distinct de $\mathbb{R}$ et non réduit à $\{0\}$ (car $i = \mathrm{e}^{i\theta}$ implique $1 = \mathrm{e}^{4i\theta}$ mais $4\theta \neq 0$). Il est par conséquence de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$ d'après le résultat montré ci-après. □

Proposition 14 *Un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Commençons par éliminer le cas où $G = \{0\}$, qui est évidemment de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a = 0$. Sinon, l'ensemble $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ est non vide et minoré. Notons $a \in \mathbb{R}^+$ sa *borne inférieure*. L'alternative annoncée dépend de la valeur de a. Nous allons montrer que si $a = 0$ alors G est dense, tandis que si $a > 0$ alors $G = a\mathbb{Z}$.

Supposons $a = 0$. Il s'agit de montrer que dans tout intervalle $]x, y[$ il y au moins un élément de G. Soient donc des réels x, y avec $x < y$. Puisque $y - x > 0$ et $0 = \inf(G \cap \mathbb{R}^{+*})$, il existe $g \in G$ tel que $0 < g < y - x$ (sinon $y - x$ serait un minorant de $G \cap \mathbb{R}^{+*}$ strictement plus grand que sa borne inférieure). Soit alors $k = E(x/g)$. On a par définition

$$kg \leq x < (k+1)g \leq x + g < y\,.$$

Donc $(k+1)g$ est un élément de $G \cap]x, y[$.

Supposons maintenant $a > 0$. On remarque tout d'abord que a doit appartenir à G. Sinon il existerait des éléments g et h de G tels que $a < h < g < 2a$ (en invoquant à nouveau la définition de la borne inférieure), d'où $0 < g - h < a$, ce qui contredirait le fait que a est un minorant de $G \cap \mathbb{R}^{+*}$. (noter que $g - h \in G$). Par suite, $a \in G$ et donc $a\mathbb{Z} \subset G$ puisque G est un groupe. Il reste à montrer que tout élément de G appartient à $a\mathbb{Z}$. Soit donc $g \in G$, et soit $k = E(g/a)$. Alors par définition $ka \leq g < (k+1)a$, ou encore $0 \leq g - ka < a$. Comme $g - ka \in G$, il doit être nul sous peine de contredire le fait que a est un minorant de $G \cap \mathbb{R}^{+*}$.

□

Le fait que le noyau de u soit $2\pi\mathbb{Z}$ signifie l'équivalence

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\theta} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in 2\pi\mathbb{Z}}$$

Le nombre réel -1 appartient à $\mathbb{U}\backslash\{1\}$ et son carré vaut 1. On en déduit

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\theta} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}}$$

Le nombre imaginaire i appartient à $\mathbb{U}\backslash\{1, -1\}$ et vérifie $i^4 = 1$. On en déduit

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\theta} = i \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \tfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}}$$

Il est également utile d'avoir en tête l'équivalence

$$\boxed{|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} = \overline{z}}$$

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

4.3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on *définit* les fonctions *cosinus*, *sinus*, *cosinus hyperbolique* (noté cosh ou ch), *sinus hyperbolique* (noté sinh ou sh) par :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \mathrm{Re}(e^{i\,x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{i\,x}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Les fonctions cos, sin, cosh, sinh sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après la proposition 9. Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques d'après le théorème 5. De plus, $\pi/2$ est le plus petit réel positif annulant cos.

Identités remarquables

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$	$\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$
$\cos(z+\pi) = -\cos z$, $\cos(\pi/2 - z) = \sin z$	$\cosh(z+i\pi) = -\cosh z$, $\cos(i\pi/2 + z) = i \sinh z$
$\sin(z+\pi) = -\sin z$, $\sin(\pi/2 - z) = \cos z$	$\sinh(z+i\pi) = -\sinh z$, $\sinh(i\pi/2 + z) = i \cosh z$

On définit aussi les fonctions *tangente*, *cotangente* :

$$\boxed{\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ pour } z \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}, \quad \mathrm{cotan} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \tan(\pi/2 - z) \text{ pour } z \notin \pi\mathbb{Z},}$$

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

et tangente hyperbolique (notée tanh ou th) :

$$\boxed{\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad \text{pour } z \notin i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z}}$$

5 Fonctions développables en série entière

Definition 6 *On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ contenant 0 est* développable en série entière en 0 *s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R[$ tel que, pour tout $z \in D(0; r) \cap U$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n .$$

On dit qu'elle est développable en série entière en $z_0 \in U$ *si la fonction $z \mapsto f(z - z_0)$ est développable en série entière en 0. Dans ce cas, on appelle* développement en série entière en z_0 *de f la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ telle que pour z voisin de z_0,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Une fonction développable en série entière en chaque point d'un ouvert est dite analytique *sur cet ouvert.*

Par exemple, la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est développable en série entière en 0 (on peut montrer qu'elle est même développable en série entière en tout point de son disque de convergence).

Proposition 15 *Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle de pôles tous non nuls. Alors la fonction $z \mapsto F(z)$ (définie en dehors des pôles) est développable en série entière en 0, et le rayon de convergence de cette série entière est égal au minimum des modules des pôles de F.*

Démonstration. Grâce à la *décomposition en éléments simples*, il suffit de montrer que toute fonction $F : z \mapsto 1/(z - z_0)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \neq 0$ est développable en série entière en 0, et que la série entière correspondante a $|z_0|$ comme rayon de convergence. En considérant $\widetilde{F} : z \mapsto z_0^n F(z_0 z) = 1/(z - 1)^n$, on se ramène au cas $z_0 = 1$. Pour ce dernier, on connaît explicitement le développement en série entière : il est trivial si $n = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall z\,,\ |z| < 1\,, \quad \frac{1}{(1 - z)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k + n - 1}{n - 1} z^k .$$

Avant de vérifier ce développement, observons que le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est bien égal à 1 car les coefficients $a_k := \binom{k+n-1}{n-1}$ sont tels que $a_{k+1}/a_k = (k + n)/(k + 1)$ tend vers 1 lorsque k tend vers $+\infty$. Le calcul du développement se fait par récurrence. On connaît en effet déjà le cas $n = 1$:

$$\forall z\,,\ |z| < 1\,, \quad \frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k .$$

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

Si l'on suppose de développement démontré pour n, alors on remarque que

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\binom{k+n}{n} - \binom{k+n-1}{n} \right) z^k = (1-z) \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{n} z^k .$$

□

Remarque 10 *Attention, le développement en série entière d'une fonction (développable en série entière) dépend du point où il est effectué. Autrement dit, les coefficients a_n du développement en z_0 dépendent de z_0 !*

Proposition 16 *Soit f un fonction développable en série entière en un point réel x_0. Alors son développement en série entière est sa* série de Taylor *en x_0,* c'est-à-dire

$$\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n .$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe $r > 0$ et des coefficients a_n tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n , \ \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[,$$

cette série étant uniformément convergente, ainsi que toutes ses dérivées, sur tout compact de $]x_0 - r, x_0 + r[$. En dérivant terme à terme, on trouve que

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n .$$

□

Proposition 17 *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I contenant 0. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit développable en série entière en 0 est que la suite (T_n) définie par*

$$T_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

converge simplement vers zéro sur un intervalle ouvert contenant 0 et inclus dans I.

Proposition 18 (Estimations de Cauchy) *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$ avec $a > 0$. On suppose qu'il existe $\rho > 0$ et $M \geq 0$ tels que pour tout $x \in]-a, a[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M n!}{\rho^n} .$$

Alors f est développable en série entière en 0.

Démonstration. L'*inégalité de Taylor–Lagrange* permet en effet alors de majorer

$$|T_n(x)| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{\rho^{n+1}}\,.$$

La suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers zéro si $|x| < \min(a, \rho)$. □

Il existe bel et bien des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série entière. L'exemple classique est la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,, \end{cases} \end{array}$$

dont la série de Taylor en 0 est nulle.

Développements en série entière usuels

Par intégration du développement en série entière de $x \mapsto 1/(1+x)$, on obtient que la fonction

$$\begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) \end{array}$$

est développable en série entière en 0, et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n\,.$$

Ce développement est vrai aussi en $x = 1$ car, d'après le *théorème des séries alternées*, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Proposition 19 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction*

$$\begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x)^\alpha \end{array}$$

est développable en série entière en 0, et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n\,.$$

Démonstration. Il s'agit de démontrer que

$$T_n(x) := (1+x)^\alpha \;-\; \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k$$

tend vers zéro lorsque $n \to +\infty$. Or d'après la *formule de Taylor avec reste intégral* on a

$$T_n(x) \;=\; x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\, \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)\,(1+tx)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

On remarque par ailleurs que

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \forall t \in [0,1]\,,\quad 0 \le \frac{1-t}{1+tx} \le 1\,.$$

Ceci permet de majorer

$$|T_n(x)| \le |x|^{n+1} \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!} \int_0^1 (1+tx)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour en déduire que la *suite* $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro il « suffit » de remarquer que pour $x \in]-1,1[$ la *série*

$$\sum |x|^{n+1} \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)|}{n!}$$

converge (utiliser par exemple la règle de d'Alembert pour les séries numériques), ce qui impose à son terme général de tendre vers zéro. □

Par intégration des développements en série entière de

$$x \mapsto 1/(1+x^2)\,,\ x \mapsto 1/\sqrt{(1-x^2)}\,,\ x \mapsto 1/(1-x^2)\,,\ x \mapsto 1/\sqrt{(1+x^2)}\,,$$

on obtient que les fonctions *arctan*, *arcsin*, *argth*, *argsh* sont développables en série entière en 0 et

$$\forall x \in]-1,1[,\quad \begin{cases} \operatorname{arctan} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\ \operatorname{arcsin} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ \operatorname{argth} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \\ \operatorname{argsh} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,. \end{cases}$$

6 Séries entières et équations différentielles

Le développement en série entière fournit un moyen de calculer les solutions d'équations différentielles.

Exemple 1 *Si φ est une solution développable en série entière en 0 de l'équation du second ordre*

$$4(1-t^2)u'' - 4tu' + u = 0\,,$$

alors les coefficients a_n de son développement en 0 doivent vérifier

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, (n+2)(n+1)a_{n+2} = (1/2-n)(1/2-n-1)a_n\,,$$

NB: Le sens des termes en rouge, les énoncés en bleu et les démonstrations en violet sont à connaître parfaitement.

d'où

$$a_{2p} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-2n+1)}{(2p)!}\, a_0$$

$$a_{2p+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-2p)}{(2p+1)!}\, a_1\,.$$

Grâce à la proposition 19 pour $\alpha = 1/2$ en déduit que

$$\varphi(t) \;=\; a_0\, \frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}{2} \;+\; a_1\, \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{2}\,.$$

Exercice 6 *Chercher les solutions développables en série entière en* 0 *de*

$$4tu'' + 2u' - u = 0\,.$$

Exprimer les restrictions de ces fonctions à $\mathbb{R}^{+*}$ et à $\mathbb{R}^{-*}$ à l'aide de fonctions usuelles.

Par ailleurs, il est parfois possible de recourir à la théorie des équations différentielles pour démontrer qu'une fonction est développable en série entière.

Exemple 2 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction*

$$\begin{array}{rccl} f: &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \cos(\alpha \arcsin t) \end{array}$$

est solution du problème de Cauchy

$$(1-t^2)u'' - tu' + \alpha^2 u = 0\,,\ u(0) = 1\,,\ u'(0) = 0\,.$$

Par le calcul, on trouve effectivement une unique solution développable en série entière à ce problème, dont le développement en série entière a un rayon de convergence égal à 1 *car ses coefficients vérifient la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, (n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2 - \alpha^2)\, a_n\,.$$

(La règle de d'Alembert montre que les deux séries numériques $\sum a_{2p}t^{2p}$ et $\sum a_{2p+1}t^{2p+1}$ convergent pour $|t| < 1$.) La somme de $\sum a_n t^n$ coïncide nécessairement avec f, d'après l'unicité dans le théorème énoncé ci-dessous.

Théorème 6 (Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires du second ordre) *Soient a, b, c des fonctions continues sur un intervalle ouvert non vide I et à valeurs réelles. Soient $t_0 \in I$, $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$. Alors le problème de Cauchy*

$$(P) \qquad u'' + a(t)u' + b(t)u = c(t)\,,\ u(t_0) = u_0\,,\ u'(t_0) = u_1\,,$$

admet une unique solution $\varphi \in \mathscr{C}^2(I;\mathbb{R})$.

Nous l'admettrons.

Remarque 11 *Une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^2(I;\mathbb{R})$ est solution de (P) si et seulement si la fonction $\Phi : t \mapsto (\varphi(t), \varphi'(t))^T$, qui appartient à $\mathscr{C}^1(I;\mathbb{R}^2)$, est solution du problème*

$$(S) \qquad U'' = A(t)U + C(t)\,,\ U(t_0) = U_0\,,$$

où

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix},\ U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Attention, lorsque les matrices $A(t)$ ne commutent pas entre elles (ce qui est le cas ici lorsque a et b ne sont pas constantes), il n'y a pas de formule générale de résolution de (S).