Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2012

Math IV - PMI/CCP — Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 1

Les calculatrices sont autorisées

D'après le sujet 2004 Partie II du Concours Commun Polytechnique (Concours dit "DEUG")
Les deux exercices sont indépendants l'un de l'autre.

Premier exercice

Il s'agit de prouver un cas particulier pas trop difficile à démontrer du théorème de convergence dominée. Ce théorème ne devra donc pas être utilisé dans cet exercice.

1) L'objectif de cette question est de fournir un exemple montrant que la convergence uniforme n'entraîne pas nécessairement la convergence des intégrales, dès lors qu'il s'agit d'intégrales sur un intervalle non borné. Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $[0,+\infty[$ la suite de fonctions (g_n) par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2} & \text{si } x \in [0, n[\\ -\dfrac{x}{n^2} + \dfrac{2}{n} & \text{si } x \in [n, 2n[\\ 0 & \text{si } x \in [2n, +\infty[. \end{cases}$$

a) Représenter le graphe de g_2.

b) Soit $n \geq 1$, montrer que g_n est continue sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx$ en utilisant des considérations géométriques.

c) Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle. A-t-on :

$$\int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} g_n(x)\right) dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx?$$

2) L'objectif de cette question est de prouver le théorème suivant, cas particulier du théorème de convergence dominée :

si une suite de fonctions (f_n) définies et continues sur $[0,+\infty[$ converge uniformément sur tout segment $[0,a]$ inclus dans $[0,+\infty[$ avec $a > 0$ vers une fonction f et s'il existe une fonction g continue sur $[0,+\infty[$ telle que pour tout $n \geq 1$, $|f_n| \leq g$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Soit donc (f_n), f et g des fonctions vérifiant les hypothèses de l'énoncé ci-dessus.

a) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

b) Soit $\epsilon > 0$. On définit sur $[0,+\infty[$ la fonction φ par $\varphi(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} g(x)\,dx$.

Déterminer la limite de φ en $+\infty$, puis justifier l'existence d'un réel $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} g(x)\,dx < \frac{\epsilon}{4}$.

En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

c) Achever la preuve du résultat que cette question se proposait de démontrer. (On s'interdira d'utiliser le théorème de convergence dominée dans cette preuve).

Deuxième exercice
On notera $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ (l'"intégrale de Gauß"). L'objectif de l'exercice est le calcul de I.
Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $[0,+\infty[$ la suite de fonctions (f_n) par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,\sqrt{n}[\\ 0 & \text{si } x \in [\sqrt{n},+\infty[. \end{cases}$$

On note aussi f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
Par ailleurs, pour tout entier naturel m, on pose :

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m \theta \, d\theta.$$

Questions préliminaires

3) Montrer que l'intégrale I est bien définie.

4) On définit sur $[0,1[$ la fonction Ψ par $\Psi(t) = t + \ln(1-t)$.
Étudier les variations et le signe de Ψ.

Première partie : intégrales de Wallis

5) a) Calculer I_0 et I_1.
   b) Justifier que (I_n) est une suite de réels strictement positifs.
   c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}.$$

6) Pour tout entier naturel non nul n, on définit la suite (u_n) par $u_n = nI_{n-1}I_n$.
Montrer que (u_n) est une suite constante et en déduire que :

$$I_{n-1}I_n = \frac{\pi}{2n}.$$

7) a) Montrer que pour $n \geq 1$, on a : $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.
   b) En déduire que $I_n \sim I_{n-1}$ quand $n \to +\infty$.
   c) Donner alors un équivalent de (I_n) à l'infini.

Deuxième partie : calcul de l'intégrale de Gauß

8) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $f_n(x) \leq f(x)$. (On pourra utiliser la fonction Ψ).

9) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$.

10) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx \right).$$

11) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}\, I_{2n+1}.$$

12) Conclure en donnant la valeur de I.