Feuille exercice n°4
Espaces vectoriels : bases, sommes directes…

Exercice 1 : Soient F , G , H trois sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

Montrer que $(F\cap G) + (F\cap H) \subset F\cap(G+H)$.

Donner un cas où l'inclusion est stricte.

Montrer que $(F\cap G) + (F\cap H) = F\cap(G+(F\cap H))$.

Définition : Soit E un K espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels de E : on dit que E est somme directe de F et G si

- tout élément de E s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G : $E = F + G$
- $F \cap G = \{0\}$

On dit alors que F et G sont supplémentaires et on note $E = F \oplus G$

Montrer que cette définition équivaut à « tout élément de E s'écrit de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G »

Ici supposons que E admette une base finie :

Montrer que cette définition équivaut à 2 autres énoncés :

(A) L'union d'une base de F et d'une base de G donne une base de E

(B) Dim E = Dim F + Dim G et E = F + G

Exercice 2 : soit F = { (x,y,z) ∈ R^3 , x+4y -5z =0 } .On admet que c'est un sous espace vectoriel de R^3

1 – Donner une base (a,b) de F.

2 – Compléter cette base en une base (a,b,c) de R^3 .

3 – montrer que $R^3 = F \oplus \mathrm{Rc}$

Exercice 3: Dans R^4 on donne les vecteurs

u_1= (1,1,1,1) , u_2= (1,-1,1,-1) , u_3= (1,3,1,3) , u_4= (1,2,0,2) , u_5= (1,2,1,2) , u_6= (3,1,3,1) .

Soient F = Vect (u_1, u_2 , u_3) et G = Vect (u_4 , u_5 , u_6) : déterminer une base de F , de G.

Exprimer la relation de dépendance qui lie la famille (u_1, u_2 , u_5 , u_6) et celle qui lie la famille (u_1, u_2 , u_5) .

En déduire une base de $F + G$ puis une base de $F \cap G$.

Soit b = (0,1,0,0) et Rb la « droite » engendrée par le vecteur b :montrer que $R^4 = (F + G) \oplus Rb$.

Exercice 4 : Soit F = { (x,y,z,t), x+y-z-6t=0} . On admettra que c'est un sous espace vectoriel de R^4.

On note a= (1,2,3,1) , b=(1,0,0,1) et G= Vect (a,b).

Déterminer dim F et dim G.

Montrer que dim $F \cap G \neq 0$ et que dim $F \cap G \neq 2$; conclusion ?

Donner une base du sous espace vectoriel $F \cap G$.

Montrer que R^4= $F\oplus Ra$ et R^4= $F\oplus Rb$;On observera qu'il n'y a pas unicité du supplémentaire de F mais que les supplémentaires ont tous la même dimension , appelée codimension de F .