Feuille d'exercices n° 3

Sous-espaces vectoriels - Bases - Dimension

Exercice 1. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la définition de la somme de deux fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ainsi que la multiplication par un réel d'une fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Quel est le zéro de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
2. Les parties suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

   1) $E_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est monotone}\}$
   2) $E_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule en } 0\}$
   3) $E_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule en un point}\}$
   4) $E_4 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}$
3. Notons I (resp. P) le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formé des fonctions impaires (resp. paires).
   (a) Montrer que I et P sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que leur intersection est réduite à la fonction nulle.
   (c) Démontrer que toute fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction de P et d'une fonction de I.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

1. On définit l'ensemble $F + G$ par $F + G = \{f + g \mid f \in F, g \in G\}$.
   Montrer que $F \cap G = F + G$ si et seulement si $F = G$.
2. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 3. Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On suppose que $F \cap H \subset G$, $H \subset F + G$ et $G \subset H$. Montrer que $G = H$.

Exercice 4. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et distinct de $\mathbb{R}^3$.
2. Considérons la famille $\mathcal{F} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que tout vecteur de F est une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$. La famille $\mathcal{F}$ est-elle génératrice de F ?
4. Déterminer deux vecteurs linéairement indépendants de F et en déduire qu'ils en forment une base.

Exercice 5. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}$ et E_a le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les trois vecteurs $(1,1,a)$, $(1,a,1)$ et $(a,1,1)$. Suivant la valeur de a, déterminer la dimension de E_a.

Exercice 7.

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?
2. En donner deux bases distinctes. Combien a-t-il de bases distinctes ?
3. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
4. En donner deux bases distinctes. Combien en admet-il ?

Exercice 8. Décrire tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ (on pourra utiliser la dimension).

Exercice 9. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2.

1. Montrer que la famille $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $E := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et en donner une base. La compléter en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 10.

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les familles suivantes sont libres :
   $\mathcal{F}_1 = \{x,\ e^x\}$, $\mathcal{F}_2 = \{e^x,\ e^{2x}\}$, $\mathcal{F}_3 = \{x,\ \sin x\}$, $\mathcal{F}_4 = \{\cos x,\ \sin x\}$.
2. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par les deux fonctions sin et cos.
   (a) Déterminer une base de H et préciser sa dimension.
   (b) Soit $F = \{f \in H \mid f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de F.

Exercice 11. On rappelle que l'ensemble E des suites réelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

   1). $F_1 = \{(u_n)_n \in E \mid (u_n)_n \text{ converge }\}$ 2). $F_2 = \{(u_n)_n \in E \mid (u_n)_n \text{ diverge }\}$

   3). $F_3 = \{(u_n)_n \in E \mid \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\}$ 4). $F_4 = \{(u_n)_n \in E \mid \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1\}$

   5). $F_5 = \{(u_n)_n \in E \mid \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty\}$
2. On note F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant la relation de récurrence :
   $$u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0 \qquad (\text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}).$$
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Trouver tous les réels r tels que la suite $(r^n)_n$ appartienne à F.
   On notera par la suite $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ les deux suites correspondant.
   (c) Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ constituent une famille libre.
   (d) Montrer que toute suite de F peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces deux suites.
   (e) En déduire la dimension, ainsi qu'une base, de F.