Dans ce qui suit, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à des singletons, a et b sont des réels avec $a < b$.

Intégrales « ordinaires »

Continuité : si $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$ est *continue* alors la fonction F définie ci-dessous est continue.

$$\boxed{\begin{array}{llll} \mathrm{F} : I & \to & \mathbb{C} & \\ \quad x & \mapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}}$$

Dérivabilité : si $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue et admet une *dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue, alors la fonction F définie ci-dessus est *de classe $\mathscr{C}^1$* et pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t\,.$$

Intégrabilité : si $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue, quels que soient c, $d \in I$, $c < d$, on a

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t\,.$$

Intégrales « ordinaires » à bornes variables

Continuité : Si les fonctions $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$, $u : I \to [a,b]$ et $v : I \to [a,b]$ sont continues alors la fonction G définie ci-dessous est continue.

$$\boxed{\begin{array}{llll} \mathrm{G} : I & \to & \mathbb{C} & \\ \quad x & \mapsto & G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}}$$

Dérivabilité : si $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue, si $u : I \to [a,b]$ et $v : I \to [a,b]$ sont dérivables alors la fonction G définie ci-dessus est dérivable et

$$G'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \;+\; v'(x)\, f(x, v(x)) \;-\; u'(x)\, f(x, u(x))\,.$$

Intégrales « généralisées »

Continuité : si $h : I \times J \to \mathbb{C}$ est continue et s'il existe une fonction $g : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux telle que $\int_J g(t)\mathrm{d}t < +\infty$ et $|h(x,t)| \le g(t)$ pour tout $(x,t) \in I \times J$, alors la fonction H définie ci-dessous est continue.

$$\boxed{\begin{array}{llll} \mathrm{H} : I & \to & \mathbb{C} & \\ \quad x & \mapsto & H(x) = \displaystyle\int_J h(x,t)\mathrm{d}t \end{array}}$$

Dérivabilité : si $h : I \times J \to \mathbb{C}$ est continue et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue, si l'*intégrale impropre* $\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ *converge* quel que soit $x \in I$, et s'il existe une fonction $g : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux telle que $\int_J g(t)\mathrm{d}t < +\infty$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le g(t)$ pour tout $(x,t) \in I \times J$, alors la fonction H définie ci-dessus est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$H'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t\,.$$