- Théorèmes à connaître avec leur démonstration
  1. Si une série converge alors son *terme général* tend vers zéro. La réciproque est fausse.
  2. Une série numérique $\sum z_n$ est *absolument convergente* si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *sommes partielles* $S_n = \sum_{k=0}^{n} |z_n|$ de la série $\sum |z_n|$ est bornée.
  3. Une série $\sum f_n$ de fonctions $f_n : D \to \mathbb{C}$ est *uniformément convergente* si et seulement si elle vérifie le *critère de Cauchy uniforme* sur $D$, c'est-à-dire que :
  $$\forall\varepsilon > 0\,,\quad \exists N \in \mathbb{N}\,;\ \forall x \in D\,,\ \forall n \geq N\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\qquad \left|\sum_{k=0}^{p} f_{n+k}(x)\right| \leq \varepsilon\,.$$
  4. Étant donnée une série de fonctions $\sum f_n$ *simplement convergente*, elle est uniformément convergente si et seulement si la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses *restes* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n$ converge uniformément vers zéro.
  5. **Théorème des séries alternées :** si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite fonctions de $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in I$, la suite réelle $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers zéro alors la *série alternée* $\Sigma(-1)^n g_n$ converge simplement. Si de plus la suite de fonctions $(g_n)$ converge uniformément vers zéro alors la série alternée $\Sigma(-1)^n g_n$ converge uniformément.
  6. Si une série de fonctions numériques bornées est *normalement convergente* alors elle est *uniformément absolument convergente*. La réciproque est fausse.
  7. Si une série de fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est *uniformément convergente sur tout compact* inclus dans cet ouvert alors sa *somme* est continue.
  8. **Interversion $\Sigma$ et $\lim$ :** si $\sum f_n$ est une série de fonctions uniformément convergente sur $D$, si $a \in \overline{D}$ (ou $a = +\infty$ si $D$ n'est pas majoré) est tel que chaque fonction $f_n$ ait une limite finie $\ell_n$ en $a$, alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge, la somme de $\sum f_n$ a une limite en $a$ et :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,.$$
- Théorèmes à connaître sans leur démonstration
  9. **Interversion $\Sigma$ et $\int$ :** si une série $\sum f_n$ de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ continues est uniformément convergente sur $[a,b]$, alors la série numérique $\sum I_n$ des intégrales $I_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$ est convergente et :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
  10. **Dérivation sous le signe $\int$ :** si une série $\sum f_n$ de fonctions $f_n : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $I$ converge en au moins un point de $I$ et si la série $\sum f_n'$ des dérivées est uniformément convergente sur tout compact de $I$ alors la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur tout compact de $I$, sa somme $\sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et :
  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}\,.$$

*NB:* La définition des notions en *italique* fait partie des connaissances à avoir.