Définition 1. *Soient* $F_1, \dots, F_m$ *des sous-espaces vectoriels de* E*. On définit la somme des* F_i*, notée* $\sum_{i=1}^{m} F_i$ *ou* $F_1 + \cdots + F_m$ *par*

$$\begin{aligned} F_1 + \cdots + F_m &= \{f_1 + \cdots + f_m \mid \forall i \in [\![1;m]\!], f_i \in F_i\} \\ &= \{e \in E \mid \exists (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m, e = f_1 + \cdots + f_m\}. \end{aligned}$$

Proposition 1. *Soient* $F_1, \dots, F_m$ *des sous-espaces vectoriels de* E*. La somme* $F_1 + \cdots + F_m$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Définition 2. *Soient* $F_1, \dots, F_m$ *des sous-espaces vectoriels de* E*. On dit que la somme* $\sum_{i=1}^{m} F_i$ *est directe (ou que les espaces* $F_1, \dots, F_m$ *sont en somme directe) si*

$$\forall x \in F_1 + \cdots + F_m, \quad \exists ! (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m, \quad x = \sum_{i=1}^{m} f_i$$

autrement dit lorsqu'il y a unicité dans l'écriture de la décomposition d'un vecteur de la somme. La somme $F_1 + \cdots + F_m$ *est alors notée*

$$\bigoplus_{i=1}^{m} F_i \quad \text{ou} \quad F_1 \oplus \cdots \oplus F_m.$$

Proposition 2. *Soient* $F_1, \dots, F_m$ *des sous-espaces vectoriels de* E*. Les espaces* $F_1, \dots, F_m$ *sont en somme directe si, et seulement si*

$$\forall (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \cdots \times F_m, \quad f_1 + \cdots + f_m = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1;m]\!], \quad f_i = 0_E$$

ce qui revient à signifier l'unicité de la décomposition du vecteur nul.

Proposition 3. *Si les sous-espaces* $F_1, \dots, F_m$ *sont en somme directe, alors pour tous* $i, j \in [\![1;m]\!]$ *avec* $i \neq j$*,* $F_i \cap F_j = \{0_E\}$*.*

Proposition 4. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $F_1, \dots, F_m$ *des sous-espaces vectoriels de* E*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i). *la somme* $F_1 + \cdots + F_m$ *est directe,*

(ii). $\dim(F_1 + \cdots + F_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)$.

Théorème 1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*). $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$,

(*ii*). *pour toutes bases respectives $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ de $F_1, \dots, F_m$, la concaténation $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ forme une base de E,*

(*iii*). *il existe des bases respectives $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ de $F_1, \dots, F_m$ telles que la concaténation $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ forme une base de E,*

(*iv*). $E = F_1 + \cdots + F_m$ *et* $\sum_{i=1}^{m} \dim(F_i) = \dim(E)$.

Définition 3. *Soient $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$. On appelle base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ toute base $\mathcal{B}$ de E obtenue en concaténant des bases respectives des sous-espaces $F_1, \dots, F_m$, autrement dit, toute base $\mathcal{B}$ de la forme*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1; m]\!], \quad \mathcal{B}_i \text{ est une base de } F_i.$$

Définition 4. *Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire*

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

Proposition 5. *Soient F et G deux sous-espaces stables par u, alors $F + G$ et $F \cap G$ sont stables par u.*

Proposition 6. *Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent, i.e. $u \circ v = v \circ u$. Les sous-espaces $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.*

Définition 5. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'endomorphisme induit par u sur F par :*

$$u_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

L'endomorphisme induit u_F est un endomorphisme de F.

Proposition 7. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u et v. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, F est stable par λu, $u+v$ et $u \circ v$. De plus,*

$$(\lambda u)_F = \lambda u_F, \quad (u+v)_F = u_F + v_F \quad \text{et} \quad (u \circ v)_F = u_F \circ v_F.$$

Proposition 8. *Soit F un sous-espace stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors*

$$\operatorname{Ker}(u_F) = \operatorname{Ker}(u) \cap F \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u_F) \subset \operatorname{Im}(u) \cap F.$$

Corollaire 1. *Soit F un sous-espace stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est injectif, alors u_F est injectif.*

Proposition 9. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On complète cette famille en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :*

(i). F est stable par u,

(ii). la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

De plus, si tel est le cas, A est la matrice de u_F dans la base $\mathcal{F}$.

Proposition 10. *Soient $F_1, \dots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :*

(i). pour tout $i \in [\![1; m]\!]$, F_i est stable par u,

(ii). la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_m \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \forall i \in [\![1; p]\!], \quad A_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{K}) \text{ où } d_i = \dim(F_i).$$

Définition 6. *On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de u si*

$$x \neq 0_E \quad \text{et} \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x) = \lambda x.$$

Définition 7. *On appelle valeur propre de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant*

$$\exists x \in E \text{ non nul}, \quad u(x) = \lambda x.$$

On appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u, et on le note $\mathrm{Sp}(u)$.

Définition 8. *Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ le sous-espace vectoriel formé des vecteurs $x \in E$ solutions de l'équation $u(x) = \lambda x$.*

Théorème 2. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :*

(i). λ est valeur propre de u,

(ii). $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$,

(iii). l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

Définition 9. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est une valeur propre de u, alors $E_\lambda(u)$ est appelé le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.*

Proposition 11. *Les sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont stables par u et*

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad u_{E_\lambda(u)} = \lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda(u)}.$$

Proposition 12. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.*

Théorème 3. *Des sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe, i.e. si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, alors $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_m}(u)$ sont en somme directe.*

Corollaire 2. *Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.*

Corollaire 3. *Si E est de dimension finie égale à n, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ ne peut admettre plus de n valeurs propres distinctes.*

Définition 10. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de la matrice A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant*

$$X \neq 0 \quad \textit{et} \quad AX = \lambda X.$$

On dit alors que la colonne X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On appelle *spectre de la matrice A l'ensemble* $\mathrm{Sp}(A)$ *formé des valeurs propres de A.*

Définition 11. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation $AX = \lambda X$. Lorsque λ est valeur propre de A, $E_\lambda(A)$ est appelé sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.*

Proposition 13. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, en notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, on a*

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad x \in E_\lambda(u) \iff X \in E_\lambda(A).$$

Corollaire 4. *Deux matrices semblables ont le même spectre.*

Définition 12. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ défini par*

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A).$$

Théorème 4. *Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unitaire, de degré n et possède les coefficients remarquables suivants :*

$$\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Théorème 5. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :*

(*i*). *λ est une valeur propre de A,*

(*ii*). $\chi_A(\lambda) = 0$.

Autrement dit, les valeurs propres de A sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique χ_A.

Corollaire 5.

1. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres (dans $\mathbb{K}$).*
2. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre complexe.*

Proposition 14. *Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré*

n. On appelle matrice compagnon de P la matrice carrée

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Le polynôme caractéristique de C_P est égal à P.

Proposition 15. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.*

Définition 13. *On appelle polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(E)$, noté χ_u, le polynôme caractéristique commun aux matrices représentant l'endomorphisme u, c'est-à-dire le polynôme caractéristique de la matrice de u dans n'importe quelle base de E.*

Théorème 6. *Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u est un polynôme unitaire de degré exactement $n = \dim(E)$ de la forme*

$$\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

De plus, les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$.

Corollaire 6. *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au plus $\dim(E)$ valeurs propres.*

Corollaire 7. *Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors tout $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au moins une valeur propre (complexe).*

Définition 14. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est dit scindé dans $\mathbb{K}[X]$ (ou scindé sur $\mathbb{K}$) s'il existe $\mu \in \mathbb{K}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que*

$$P = \mu \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i).$$

Lorsque les λ_i intervenant ci-dessus sont deux à deux distincts, on dit que P est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}[X]$ (ou scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$). Autrement dit, P est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, P est scindé sur $\mathbb{K}$ et chacune de ses racines est de multiplicité 1.

Définition 15. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. On appelle multiplicité algébrique de λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_u. On la note $m_\lambda(u)$ (de même pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en notant cette fois $m_\lambda(A)$).*

On appelle multiplicité géométrique de λ la dimension de l'espace propre associé à λ, $\dim(E_\lambda(u))$.

Proposition 16. *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on a*

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u) \leq \dim(E).$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 8. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ possède exactement $n = \dim(E)$ valeurs propres comptées avec multiplicité (algébrique) (idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).*

Théorème 7. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et F est un sous-espace vectoriel de E non nul stable par u, alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u sur F divise le polynôme caractéristique de u, i.e. $\chi_{u_F} \mid \chi_u$.*

Théorème 8. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a*

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda(u)$$

(idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Définition 16. *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est appelée base de diagonalisation de U.*

Théorème 9. *Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :*

(i). *u est diagonalisable,*

(ii). *il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.*

Théorème 10. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :*

(i). *u est diagonalisable,*

(ii). *E est la somme directe des sous-espaces propres de u, i.e. $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$,*

(iii). $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E)$, (*iv*). χ_u *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *et, pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)$.

Corollaire 9. *Si* $u \in \mathcal{L}(E)$ *possède* $n = \dim(E)$ *valeurs propres deux à deux distinctes (ce qui équivaut à dire que* χ_u *est scindé à racines simples sur* $\mathbb{K}$*), alors* u *est diagonalisable.*

Définition 17. *Une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e. il existe* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $D \in D_n(\mathbb{K})$ *vérifiant*

$$P^{-1}AP = D \text{ (ce qui équivaut aussi à } A = PDP^{-1}\text{)}.$$

Théorème 11. *Soient* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\mathcal{B}$ *une base de* E. *Notons* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *la matrice de* u *dans la base* $\mathcal{B}$. *On a équivalence entre :*

(*i*). u *est diagonalisable,*

(*ii*). A *est diagonalisable.*

Théorème 12. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On a équivalence entre :*

(*i*). A *est diagonalisable,*

(*ii*). $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

(*iii*). $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$,

(*iv*). χ_A *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *et pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda(A)$.

De plus, dans ce cas, les matrices diagonales semblables à A *sont celles dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de* A *comptées avec multiplicité (algébrique).*

Corollaire 10. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *admet* n *valeurs propres distinctes, alors* A *est diagonalisable.*

Définition 18. *Un endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(E)$ *est dit trigonalisable s'il existe une base de* E *dans laquelle la matrice de* u *est triangulaire supérieure. Une telle base est appelée base de trigonalisation de* u.

Proposition 17. *Soient* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base et* E *et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On a équivalence entre :*

(*i*). *la base* $\mathcal{B}$ *trigonalise l'endomorphisme* u,

(*ii*). $\forall k \in [\![1; n]\!]$, *le sous-espace* $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\}$ *est stable par* u.

Définition 19. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, i.e. il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et T triangulaire supérieure telles que $P^{-1}AP = T$.*

Proposition 18. *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On a équivalence entre :*

(i). A est trigonalisable,

(ii). u est trigonalisable.

Théorème 13. *Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :*

(i). u est trigonalisable,

(ii). le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Idem pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 11. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors $\mathrm{Tr}(u)$ est la somme des valeurs propres de u comptées avec multiplicité (algébrique) et $\det(u)$ est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité (algébrique), i.e.*

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda(u)\lambda \qquad \text{et} \qquad \det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda(u)}.$$

Définition 20. *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Le plus petit entier p vérifiant $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est appelé indice de nilpotence de u.*

Ce vocabulaire se transpose aux matrices.

Théorème 14. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :*

(i). u est nilpotent,

(ii). il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure stricte, i.e. de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$$

(iii). le polynôme caractéristique de u est égal à X^n.

Proposition 19. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si, et seulement si, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.*

Corollaire 12. *Si u est un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $A^n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.*