Définition 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. On appelle déterminant de la matrice A le scalaire*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \in \mathbb{K}$$

encore noté

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Proposition 1. *Soit $T = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, alors*

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Corollaire 1. *Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.*

Proposition 2. *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det({}^tA) = \det(A)$, et donc*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Proposition 3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en permutant les colonnes selon σ est égal à $\varepsilon(\sigma)\det(A)$, autrement dit*

$$\det\begin{pmatrix} C_{\sigma(1)} & C_{\sigma(2)} & \dots & C_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \varepsilon(\sigma)\det\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}.$$

Théorème 1. *Le déterminant est une application n-linéaire (ou multilinéaire) alternée en les colonnes de la matrice, c'est-à-dire :*

(i). Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, le déterminant est linéaire par rapport à la j-ème colonne : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. On suppose qu'il existe des colonnes C et C'

ainsi que des scalaires $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ tels que $C_j = \lambda C + \lambda' C'$, alors

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(C_1\ C_2\ \ldots\ C_{j-1}\ \underbrace{\lambda C + \lambda' C'}_{\textit{position } j}\ C_{j+1}\ \ldots\ C_n) \\
&= \lambda \det(C_1\ C_2\ \ldots\ C_{j-1}\ \underbrace{C}_{\textit{position } j}\ C_{j+1}\ \ldots\ C_n) \\
&\qquad + \lambda' \det(C_1\ C_2\ \ldots\ C_{j-1}\ \underbrace{C'}_{\textit{position } j}\ C_{j+1}\ \ldots\ C_n)
\end{aligned}$$

(ii). Pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$ avec $i \neq j$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si l'on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A et B la matrice obtenue à partir de A en échangeant les colonnes C_i et C_j, alors $\det(B) = -\det(A)$.

Proposition 4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice ayant deux colonnes égales, alors* $\det(A) = 0$.

Corollaire 2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si les colonnes de A sont liées, alors* $\det(A) = 0$.

Théorème 2. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors* $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

Corollaire 3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *On a :* $\det(A) \neq 0 \iff A$ *est inversible.*
2. *Si A est inversible, alors* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Théorème 3. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$ et de lignes $L_1, \ldots, L_n$, et $i \in [\![1;n]\!]$.*

1. *Pour $j \in [\![1;n]\!]$ avec $j \neq i$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, les opérations $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne modifient pas le déterminant.*
   Plus généralement, pour une famille $(\lambda_j)_{j \neq i}$ de scalaires, les opérations $C_i \leftarrow C_i + \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j C_j$ et $L_i \leftarrow L_i + \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j L_j$ ne modifient pas le déterminant.
2. *L'opération d'échange entre deux colonnes ($C_i \leftrightarrow C_j$ pour $j \neq i$) ou entre deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$ pour $j \neq i$) multiplie le déterminant par -1.*
   Plus généralement, la permutation des lignes ou des colonnes d'une matrice selon une permutation σ multiplie son déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.
3. *Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, les opérations $C_i \leftarrow \lambda C_i$ ou $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplient le déterminant par λ.*

Lemme 1. *Soient* $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n+1, 1\leq j\leq n}$ *des scalaires, alors*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & 0 \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & 1 \end{vmatrix}_{[n+1]} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Définition 2. *Soient* $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $r \in [\![1;n]\!]$. *Soient* $i_1, \dots, i_r \in [\![1;n]\!]$ *deux à deux distincts et* $j_1, \dots, j_r \in [\![1;n]\!]$ *deux à deux distincts également. Notons* $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ *la matrice obtenue à partir de* A *en ne gardant que les termes communs aux lignes* $L_{i_1}, \dots, L_{i_r}$ *et aux colonnes* $C_{j_1}, \dots, C_{j_r}$*, c'est-à-dire* $B = (a_{i_k, j_\ell})_{1\leq k,\ell\leq r}$. *Le déterminant d'une telle matrice* B *est appelé un mineur d'ordre* r *de la matrice* A.

Définition 3. *Soient* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $i, j \in [\![1;n]\!]$. *Notons* $\Delta_{i,j}$ *le mineur d'ordre* $n-1$ *de* A *obtenu en supprimant la ligne* L_i *et la colonne* C_j *de* A. *On appelle cofacteur d'indice* (i,j) *de* A *le coefficient* $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Théorème 4. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Soit* $j \in [\![1;n]\!]$. *Formule de développement du déterminant de* A *selon la* j*-ième colonne :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}.$$

Soit $i \in [\![1;n]\!]$. *Formule de développement du déterminant de* A *selon sa* i*-ième ligne :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}.$$

Proposition 5. *Soient* $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, *alors*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C).$$

Définition 4. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On appelle comatrice de* A *la matrice des cofacteurs de* A, *et on la note*

$$\mathrm{com}(A) = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On rappelle que pour $i, j \in [\![1;n]\!]$, $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ *où* $\Delta_{i,j}$ *est le mineur d'ordre* $n-1$ *de* A *obtenu en supprimant la ligne* i *et la colonne* j.

Théorème 5. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,*

$$A \times {}^t\text{com}(A) = {}^t\text{com}(A) \times A = \det(A) I_n.$$

Corollaire 4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible (ce qui équivaut à $\det(A) \neq 0$), alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{com}(A).$$

Définition 5. *On appelle matrice extraite de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ toute matrice formée à partir de A en retirant un certain nombre de lignes et/ou de colonnes de A.*

Proposition 6. *Toute matrice extraite de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang inférieur à celui de A.*

Lemme 2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ non nulle et $r \in [\![1;n]\!]$. On a l'équivalence :*

$$\text{rang}(A) \geq r \iff \textit{il existe un mineur de } A \textit{ d'ordre } r \textit{ qui est non nul.}$$

Théorème 6. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ non nulle. Le rang de A est égal à l'ordre maximal des mineurs non nuls extraits de A, c'est-à-dire que $\text{rang}(A) = r$ si, et seulement si, il existe un mineur de A d'ordre r non nul et tous les mineurs de A d'ordre strictement supérieur à r sont nuls.*

Corollaire 5. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ non nulle. Le rang de A est égal à la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A.*

Proposition 7. *Soient $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille de scalaires et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$. Le système linéaire à n équations et n inconnues suivant*

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right.$$

a pour équation matricielle $AX = B$ où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Si $\det(A) \neq 0$, *le système ci-dessus admet une unique solution donnée par :*

$$\forall j \in [\![1;n]\!], \quad x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_{j-1} & B & C_{j+1} & \dots & C_n \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

où $C_1, \dots, C_n$ *désignent les colonnes de* A.

Lemme 3. *Soient* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E. *On note* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *et* $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ *les matrices respectives de l'endomorphisme* u *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$, *alors* $\det(A) = \det(A')$.

Définition 6. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On définit le déterminant de* u *comme le déterminant de la matrice de* u *dans n'importe quelle base de* E.

Proposition 8. *Soient* u *et* v *deux endomorphismes de* E.

1. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$,
3. $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)$,
4. *On a les équivalences :*

$$u \text{ est bijectif} \iff u \text{ est surjectif} \iff u \text{ est injectif} \iff \det(u) \neq 0.$$

5. *Si* u *est bijectif,* $\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}$.

Définition 7. *On appelle déterminant dans la base* $\mathcal{B}$ *de la famille* $(x_1, \dots, x_n)$ *de vecteurs de* E *le scalaire*

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).\right)$$

Proposition 9. *Soit* $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ *une famille de vecteurs de* E. *On a équivalence entre :*

(i). *la famille* $\mathcal{F}$ *est une base de* E,

(ii). $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Proposition 10. *Soient* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $(x_1, \ldots, x_n)$ *une famille de vecteurs de* E*, alors*

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$