Définition 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Un espace affine de direction E ou dirigé par E est un ensemble $\mathcal{E}$ non vide muni d'une application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}\times\mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ (A,B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

telle que :

(i). *(relation de Chasles)* $\forall A,B,C\in\mathcal{E},\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,

(ii). $\forall A\in\mathcal{E}$, *l'application* $\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{AM} \end{array}$ *est bijective,*

autrement dit, $\forall u\in E, \exists! M\in\mathcal{E}$ *tel que* $\overrightarrow{AM}=u$.

L'espace vectoriel E est appelé la direction ou l'espace directeur de $\mathcal{E}$. On appelle dimension d'un espace affine $\mathcal{E}$ la dimension de son espace directeur E.

Proposition 1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E.*

(i). $\forall A\in\mathcal{E},\quad \overrightarrow{AA}=0_E$,

(ii). $\forall A,B\in\mathcal{E},\quad \overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Définition 2. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. Pour tout $A\in\mathcal{E}$, pour tout $u\in E$, il existe un unique point $B\in\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB}=u$. On note alors $B=A+u$ cet unique point, et on l'appelle le translaté de A par u.*

Définition 3. *Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ s'il existe $A\in\mathcal{F}$ tel que $F=\{\overrightarrow{AM}\mid M\in\mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. On a alors*

$$\mathcal{F}=A+F=\{A+u\mid u\in F\}.$$

On dit que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par A et de direction F.

Proposition 2. *Soit $\mathcal{F}\subset\mathcal{E}$ non vide. On a équivalence entre :*

(i). *$\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$,*

(ii). *pour tout $O\in\mathcal{F}$, $\{\overrightarrow{OM}\mid M\in\mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E,*

(iii). *il existe F un sous-espace vectoriel de E, tel que pour tout $O\in\mathcal{F}$, $\mathcal{F}=O+F=\{O+u\mid u\in F\}$,*

(iv). *il existe F un sous-espace vectoriel de E, il existe $O\in\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F}=O+F$.*

Le sous-espace vectoriel F est alors unique, et vérifie $F=\{\overrightarrow{OM}\mid M\in\mathcal{F}\}$ pour tout $O\in\mathcal{F}$.

Proposition 3. *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ non vide. On a équivalence entre :*

(i). *$\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$,*

(ii). *il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathcal{F}$ est un espace affine dirigé par F, de structure affine donnée par la restriction et la corestriction de* $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ (A,B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$ *à $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ et F.*

Définition 4. *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ est :*

- *une droite affine si* $\dim \mathcal{F} = 1$,
- *un plan affine si* $\dim \mathcal{F} = 2$,
- *un hyperplan affine si* $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{E} - 1$.

Proposition 4. *Une intersection (quelconque) de sous-espaces affines $\mathcal{F}_i$ (pour $i \in I$) de $\mathcal{E}$, de directions respectives F_i est soit vide, soit un sous-espace affine dont la direction est l'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ des directions F_i.*

Proposition 5. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G. Si F et G sont supplémentaires dans E (i.e. $E = F \oplus G$), alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension 0, c'est à dire un ensemble de $\mathcal{E}$ réduit à un point.*

Définition 5. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de directions respectives F et G. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles si $F = G$. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont faiblement parallèles si $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

Proposition 6. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$.*

(i) *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont disjoints (i.e $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$), soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont confondus (i.e $\mathcal{F} = \mathcal{G}$).*

(ii) *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont faiblement parallèles, alors soit l'un est inclus dans l'autre (i.e $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ ou $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$), soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont disjoints.*

Définition 6. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ une partie non vide. Il existe un plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace affine contenant $\mathcal{A}$. Celui-ci est appelé sous-espace affine engendré par $\mathcal{A}$ et on le notera* $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$.

Proposition 7. *Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a :*

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{A}) = A + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{A}\}.$$

Autrement dit, la direction de $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ où $M \in \mathcal{A}$.

Définition 7. *On appelle repère cartésien de l'espace affine $\mathcal{E}$ de direction E la donnée de $\mathcal{R} = (A, e_1, \dots, e_n)$ où A est un point de $\mathcal{E}$ et la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe alors un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$M = A + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Les coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont appelées coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\mathcal{R}$.

Si l'espace directeur E est un espace euclidien, on dit que le repère $\mathcal{R} = (A, e_1, \dots, e_n)$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$ si la base $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E. Si de plus E est un espace euclidien orienté, on dit que le repère $\mathcal{R} = (A, e_1, \dots, e_n)$ est un repère orthonormé direct (respectivement indirect) de $\mathcal{E}$ si la base $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée directe (resp. indirecte) de E.

Définition 8. *Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. On dit que f est une application affine s'il existe une application linéaire $L_f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :*

$$\forall A, B \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = L_f(\overrightarrow{AB})$$

ce qui équivaut à

$$\forall A, B \in \mathcal{E}, \quad f(B) = f(A) + L_f(\overrightarrow{AB}).$$

L'application linéaire L_f est alors unique, elle est appelée la partie linéaire associée à f.

Proposition 8. *Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. On a équivalence entre :*

(i). f est une application affine,

(ii). $\exists A \in \mathcal{E}, \exists L_f \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\forall B \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = L_f(\overrightarrow{AB}).$$

Théorème 1. *Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{f} \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que*

$$f(A) = B \quad \text{et} \quad L_f = \overrightarrow{f}.$$

Définition 9. *Soit $u \in E$. On appelle translation de vecteur u l'application*

$$t_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M+u. \end{array}$$

Théorème 2. *Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine, de partie linéaire L_f. L'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, dirigé par le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(L_f - \mathrm{Id}_E)$.*

De plus, f admet un unique point fixe si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de L_f.

Proposition 9. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. On suppose que leurs directions respectives F et G sont supplémentaires dans E (i.e. $E = F \oplus G$). Alors :*

(i). Pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique point M' dans $\mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{MM'} \in G$. Ce point M' est l'unique point d'intersection de $\mathcal{F}$ avec le sous-espace affine passant par M et parallèle à $\mathcal{G}$. Le point M' est appelé le projeté de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$.

(ii). L'application $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ qui à un point $M \in \mathcal{E}$ associé le point $M' \in \mathcal{F}$ défini ci-dessus s'appelle la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$. C'est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{p}$, où $\overrightarrow{p}$ désigne la projection vectorielle sur F parallèlement à G.

(iii). $p \circ p = p$

(iv). L'ensemble des points fixes de p est $\mathcal{F}$.

Proposition 10. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affine de $\mathcal{E}$. On suppose que leurs directions respectives F et G sont supplémentaires dans E. Alors :*

(i). Pour tout $M \in \mathcal{E}$, si on note $M' = p(M)$ le projeté de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$, il existe un unique $M'' \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M'M''}$. Le point M'' est appelé le symétrique de M par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$.

(ii). L'application $s : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ qui à un point $M \in \mathcal{E}$ associé le point M'' défini ci-dessus s'appelle la symétrique affine par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$. C'est une application affine dont la partie linéaire associée est la symétrie vectorielle $\overrightarrow{s}$ par rapport à F parallèlement à G.

(iii). On a : $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ donc s est bijective d'inverse $s^{-1} = s$.

(iv). L'ensemble des points fixes de s est $\mathcal{F}$.

Définition 10. *On dit qu'un espace affine $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien si sa direction E est un espace euclidien.*

Définition 11. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux lorsque leurs directions respectives F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux, ce qui* *équivaut à :*

$$\forall u \in F, \quad \forall v \in G, \quad \langle u, v\rangle = 0.$$

Définition 12. *On appelle projection affine orthogonale toute projection affine sur un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de direction F parallèlement à un sous-espace affine $\mathcal{G}$ de direction $F^\perp$.*

On appelle symétrie affine orthogonale toute symétrie affine par rapport à un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de direction F parallèlement à un sous-espace affine $\mathcal{G}$ de direction $F^\perp$.

Définition 13. *Soient $A, B \in \mathcal{E}$. On appelle distance entre A et B le réel positif $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.*

Proposition 11. *L'application* $d : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (A,B) & \longmapsto & d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| \end{array}$ *est une distance sur $\mathcal{E}$:*

(i). $\forall A, B \in \mathcal{E},\ d(A,B) = 0 \iff A = B$,

(ii). $\forall A, B \in \mathcal{E},\ d(A,B) = d(B,A)$,

(iii). $\forall A, B, C \in \mathcal{E},\ d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.

Définition 14. *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{E}$. On appelle distance de A à $\mathcal{F}$ le réel positif*

$$d(A,\mathcal{F}) = \inf\{d(A,M) \mid M \in \mathcal{F}\} = \inf\{\|\overrightarrow{AM}\| \mid M \in \mathcal{F}\}.$$

Proposition 12. *Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{E}$. Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{F}$. La distance de A à $\mathcal{F}$ est atteinte et H est l'unique point de $\mathcal{F}$ pour lequel $\|\overrightarrow{AH}\| = d(A,\mathcal{F})$.*

Définition 15. *On appelle isométrie affine toute application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ qui conserve la distance, i.e. telle que*

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \quad d(f(M), f(N)) = d(M,N)$$

ce qui équivaut à

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \quad \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Proposition 13. *Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une isométrie affine, alors f est une application affine.*

Théorème 3. *Soit* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *une application affine. L'application* f *est une isométrie affine si, et seulement si, sa partie linéaire associée* L_f *est une isométrie vectorielle de* E*, i.e. si, et seulement si,* $L_f \in O(E)$.

Théorème 4. *(Forme réduite d'une isométrie (admis)) Soient* $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *une isométrie et* $L_f \in O(E)$ *sa partie linéaire associée.*

(i). *Il existe un unique vecteur* $u \in E$ *et une unique isométrie affine* $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *admettant (au moins) un point fixe tels que*

$$f = t_u \circ g = g \circ t_u.$$

(ii). *Dans cette décomposition, le sous-espace affine* $\mathcal{V}$ *des points fixes de* g *est dirigé par le sous-espace vectoriel* $V = \mathrm{Ker}(L_f - \mathrm{Id}_E)$ *et le vecteur* u *de la translation appartient à* V.