Définition 1

On appelle ***série entière*** *définie par la suite de coefficients complexes* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, la série des fonctions* $u_n : z \in \mathbb{C} \longmapsto a_n z^n$*. Par abus de notation, cette série de fonctions* $\sum u_n$ *est notée* $\sum a_n z^n$*.*

L'ensemble $\mathcal{D}$ *des* $z \in \mathbb{C}$ *pour lesquels la série numérique* $\sum a_n z^n$ *converge est appelé* ***domaine de convergence*** *de la série entière et la fonction* $S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par* $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est appelée somme de cette série entière.*

Lemme 2 (*Lemme d'Abel*)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes. Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée. Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < |z_0|$*, la série numérique* $\sum a_n z^n$ *converge absolument.*

Définition 3

On appelle ***rayon de convergence*** *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *le nombre :*

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \text{ la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

avec la convention : si $A \subset \mathbb{R}$ *est une partie de* $\mathbb{R}$ *(non vide) non majorée,* $\sup A = +\infty$*.*

Proposition 4

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ *vaut*

$$R = \sup\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \text{ la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\}.$$

Proposition 5

Soient $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *et* $z \in \mathbb{C}$*.*

(*i*) *Si* $|z| < R$*, alors la série numérique* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge absolument.*

(*ii*) *Si* $|z| > R$*, alors la série numérique* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *diverge grossièrement ; plus précisément, la suite* $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas bornée.*

Corollaire 6

Soit D *le domaine de convergence d'une série entière de rayon de convergence* R*.*

- *Si* $R = 0$*, alors* $D = \{0\}$*.*
- *Si* $R = +\infty$*, alors* $D = \mathbb{C}$*.*
- *Si* $R \in]0; +\infty[$*, alors* $D(0,R) \subset D \subset \overline{D(0,R)}$*, où l'on a noté* $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ *le disque ouvert de centre* O *et de rayon* R*.*

Il n'y pas de résultat général sur la convergence des séries entières sur le cercle de centre O *et de rayon* R*.*

Définition 7

Le disque $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ *est appelé* ***disque ouvert de convergence*** *de la série entière*

$\sum a_n z^n$.

Proposition 8 (*Règle de d'Alembert pour les séries entières*)

*Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, **non nuls** à partir d'un certain rang n_0. Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geq n_0}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ lorsque $n \to +\infty$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $R = \frac{1}{\ell}$ avec les conventions $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.*

Proposition 9 (*Règle de Cauchy*)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Si la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$ (avec les conventions $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$).

Définition 10

*On appelle **somme** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.*

Théorème 11 (*Somme de deux séries entières*)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors le rayon de convergence R de la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Proposition 12

Si les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont des rayons de convergence respectifs R_a et R_b vérifiant $R_a \neq R_b$, alors le rayon de convergence de la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$.

Définition 13

*On appelle **produit des séries entières** $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Théorème 14 (*Produit de deux séries entières*)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors *le rayon de convergence R de la série entière produit $\sum c_n z^n$ vérifie*

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Définition 15

On appelle **série entière dérivée** de la série entière $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$.

Proposition 16

Une série entière $\sum a_n z^n$ et sa série entière dérivée $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ ont même rayon de convergence.

Théorème 17 (*Convergence normale des séries entières sur les disques fermés*)

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé centré en 0 et de rayon r strictement inférieur à R.

Théorème 18 (*Convergence normale des séries entières, cas réel*)

Une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $]-R; R[$.

Corollaire 19 (*Continuité de la somme d'une série entière, cas réel*)

La somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de variable réelle et de rayon de convergence $R > 0$, est continue sur $]-R; R[$.

Théorème 20 (*Intégrale d'une série entière*)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $[a; b]$ un segment inclus dans $]-R; R[$. Alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n x^n \,\mathrm{d}x\right).$$

Définition 21

On appelle **serie entière primitive** de $\sum a_n x^n$ la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Corollaire 22 (*Primitive d'une série entière*)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la série entière primitive $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a le même rayon de convergence et sa somme est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction somme $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R;R[$. En d'autres termes, pour tout $x \in]-R;R[$, on a

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Théorème 23 (*Dérivabilité de la somme d'une série entière*)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R;R[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. De plus, on a :

$$\forall x \in]-R;R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Corollaire 24 (*La somme d'une série entière est indéfiniment dérivable*)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$) et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-R;R[, \quad S^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) a_{n+p} x^n. \end{aligned}$$

Théorème 25 (*Calcul des coefficients d'une série entière*)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Corollaire 26 (*Identification des coefficients de séries entières*)

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$. On suppose qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 27

*On appelle **exponentielle complexe**, notée $\exp : z \longmapsto e^z$, la somme de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ qui* *est de rayon de convergence infini. Ainsi, on a*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 28

1. *Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.*
2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$e^z \neq 0 \text{ et } \frac{1}{e^z} = e^{-z}, \quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}} \quad \text{et} \quad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

Définition 29

On définit les fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique complexes de la manière suivante : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\\
\sin(z) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
\mathrm{ch}(z) &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\\
\mathrm{sh}(z) &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 30

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est ***développable en série entière*** en 0 *s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels que*

$$]-r;r[\subset I \quad \text{et} \quad \forall x \in]-r;r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Définition 31

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est développable en série entière en x_0 si la fonction $t \longmapsto f(x_0+t)$ est développable en série entière en 0. Dans ce cas, on appelle ***développement en série entière*** *de f en x_0 la série $\sum a_n(x-x_0)^n$ telle que pour x au voisinage de x_0*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Définition 32

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On appelle ***série de Taylor*** *de f en $x_0 \in I$ la série* *entière :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Théorème 33 (*Condition nécessaire de développement en série entière*)

Si la fonction $f : I \longmapsto \mathbb{C}$ est développable en série entière en $x_0 \in I$, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et le développement en série entière de f en x_0 est sa série de Taylor en x_0, c'est-à-dire

$$\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Théorème 34 (*Propriétés des fonctions développables en série entière*)

1. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions développables en série entière en $x_0 \in I$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf, $f+g$ et fg sont développables en série entière en x_0.*
2. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière en $x_0 \in I$. Alors les dérivées successives de f ainsi que les primitives de f sont développables en série entière en x_0 et leur développement en série entière s'obtient par dérivation (resp. intégration) terme à terme à partir de celui de f.*

Proposition 35 (*Développement du binôme*)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1;1[$ et :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

(avec la convention $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k) = 1$ si $n=0$). De plus, le rayon de convergence de la série entière associée vaut

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Famille de l'exponentielle :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\cos(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
\sin(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\mathrm{ch}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
\mathrm{sh}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence $R = +\infty$.

Famille du binôme :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \\
\frac{1}{1+z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
-\ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\
\arctan(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\
\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\
\arcsin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence égal à 1 (sauf pour celle donnant le développement de $(1+x)^\alpha$: son rayon vaut $R = 1$ si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ et vaut $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$).

Figure 1 – Développements en séries entières usuels