Définition 1. *On appelle série de fonctions de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par*

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k.$$

Cette série de fonctions est notée $\sum_{n \geq n_0} f_n$ et pour $n \geq_0$, S_n est appelée somme partielle de rang n de celle-ci.

Définition 2. *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement** sur $A \subset D$ si la suite de fonctions $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge simplement sur A vers une certaine fonction S. Cette fonction S est appelée somme de la série de fonctions et notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.*

Théorème 1. *Soit $A \subset D$. On a équivalence entre :*

(i). la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur A,

(ii). pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

De plus, si tel est le cas, on a :

$$\forall x \in A, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Proposition 1. *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $A \subset D$, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur A.*

Définition 3. *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $A \subset D$, alors on peut introduire son reste de rang n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$, défini par $R_n : x \in A \longmapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.*

Proposition 2. *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $A \subset D$, alors sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S = S_n + R_n$ et la suite de fonctions $(R_n)_n$ des restes converge simplement sur A vers la fonction nulle.*

Définition 4. *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ ***converge absolument simplement*** *sur* $A \subset D$ *si la série de fonctions* $\sum |f_n|$ *converge simplement sur* A*, autrement dit, si pour tout* $x \in A$*, la série numérique* $\sum |f_n(x)|$ *converge.*

Proposition 3. *Si la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge absolument simplement sur* $A \subset D$*, alors elle converge simplement sur* A*.*

Définition 5. *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $A \subset D$ *si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de ses sommes partielles (où* $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$*) converge uniformément sur* A*.*

Proposition 4. *Si la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $A \subset D$*, alors elle converge simplement sur* A*.*

Proposition 5. *Si la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $A \subset D$*, alors la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* A *vers la fonction nulle.*

Proposition 6. *Soit* $A \subset D$*. On a équivalence entre :*

(i). *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* A*,*

(ii). *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* A *et la suite de fonctions* $(R_n)_n$ *de ses restes (où* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$*) converge uniformément vers la fonction nulle sur* A*.*

Définition 6. *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ ***converge normalement*** *sur* $A \subset D$ *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la fonction* f_n *est bornée sur* A *et la série numérique* $\sum \|f_n\|_{\infty,A}$ *converge, où* $\|f_n\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |f_n(x)|$*.*

Théorème 2 (CVN $\Rightarrow$ CVAS et CVU)**.**
Si la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement sur* $A \subset D$*, alors celle-ci converge uniformément sur* A*. De plus, elle converge absolument simplement sur* A*.*

Théorème 3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et $A \subset D$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A et si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.*

Corollaire 1. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur un intervalle $I \subset D$ et si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.*

Théorème 4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et $A \subset D$. Soit a un point adhérent à A (ou $a = +\infty$ si A n'est pas majoré, ou $a = -\infty$ si A n'est pas minoré). On suppose que*

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en a, notée l_n,

(ii). la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A,

alors la série numérique $\sum l_n$ converge, la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en a, et $S(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$. Autrement dit,

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Théorème 5. *Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de $[a;b]$ vers $\mathbb{K}$. On suppose que :*

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a;b]$,

(ii). la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a;b]$,

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a;b]$ et la série numérique $\sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Autrement dit,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Théorème 6 (Théorème d'intégration terme à terme (admis))**.** *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions de* I *vers* $\mathbb{K}$*. On suppose que :*

(*i*). *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la fonction* f_n *est continue par morceaux et intégrable sur* I*,*

(*ii*). *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I *vers une fonction* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *continue par morceaux,*

(*iii*). *la série numérique* $\sum \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ *converge,*

alors la fonction S *est intégrable sur* I *et*

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 7. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $\sum f_n$ *une série de fonctions de* I *vers* $\mathbb{K}$*. On suppose que*

(*i*). *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* f_n *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I*,*

(*ii*). *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement en un point* $a \in I$*,*

(*iii*). *la série de fonctions des dérivées* $\sum f_n'$ *converge uniformément sur tout segment de* I*,*

alors la série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I*, la somme* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et*

$$S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Théorème 8. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $\sum f_n$ *une série de fonctions de* I *vers* $\mathbb{K}$*. On suppose que*

(*i*). *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* f_n *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* I*,*

(*ii*). *pour tout* $k \in [\![0; p-1]\!]$*, la série de fonctions* $\sum f_n^{(k)}$ *converge simplement sur* I*,*

(*iii*). *la série de fonctions* $\sum f_n^{(p)}$ *converge uniformément sur tout segment de* I*,*

alors la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* I *et*

$$\forall k \in [\![0; p]\!], \quad S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$