Définition 1. *On appelle suite de fonctions de* D *vers* $\mathbb{K}$ *toute suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(ou* $(f_n)_{n\geq n_0}$ *avec* $n_0 \in \mathbb{N}$*) vérifiant pour tout* n, $f_n : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Définition 2. *On dit que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge simplement*** *sur* $A \subset D$ *vers* $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ *si pour tout* $x \in A$*, la suite numérique* $(f_n(x))_n$ *converge vers* $f(x)$*, c'est-à-dire*

$$\forall x \in A, \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Définition 3. *Si* $(f_n)_n$ *converge simplement sur* A *vers* f*, on dit que* f *est la* ***limite simple*** *sur* A *de la suite* (f_n).

Proposition 1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions à valeurs réelles convergeant simplement vers* f *sur* $A \subset D$.

1. *Si* f_n *est positive sur* A *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors* f *est positive sur* A.
2. *Si* f_n *est croissante sur* A *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors* f *est croissante sur* A.
3. *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est convexe sur un intervalle* $I \subset A$*, alors* f *est convexe sur* I.

Définition 4. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* D *vers* $\mathbb{K}$*. On dit que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge uniformément*** *sur* $A \subset D$ *vers* $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Théorème 1. *Soient* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* D *vers* $\mathbb{K}$, $A \subset D$ *et* $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$*. On a équivalence entre :*

1. $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* A *vers* f,
2. *il existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \geq N_0$*, la fonction* $f_n - f$ *est bornée sur* A*, et*

$$\|f_n - f\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\geq N_0}}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème 2 (Convergence uniforme implique convergence simple)**.**
Soient $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* D *vers* $\mathbb{K}$ *et* $A \subset D$*. Si* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ *sur* A*, alors elle converge simplement vers* f *sur* A.

Proposition 2. *Si pour tout n, f_n est bornée sur A, et la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors f est bornée sur A.*

Théorème 3. *Soit $a \in A$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ sur A, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.*

Corollaire 1. *Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.*

Théorème 4 (Théorème de la double limite)**.**
Soit a un point adhérent à A (ou $a = +\infty$ si A n'est pas majoré, $a = -\infty$ si A n'est pas minoré).

1. *Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ sur A,*
2. *s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, la fonction f_n admet une limite finie en a, notée ℓ_n,*

alors la suite numérique $(\ell_n)_{n \geq N_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, la fonction f a une limite en a, et ces deux limites sont égales :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Théorème 5. *Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a;b]$ vers $\mathbb{K}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, alors la fonction limite f est continue sur $[a;b]$ et la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Autrement dit,*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Définition 5. *Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $(a_i)_{i \in [\![0;p]\!]}$ de $[a;b]$ (c'est-à-dire une suite finie $(a_i)_{i \in [\![0;p]\!]}$ telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_i < \cdots < a_p = b$) telle que, pour tout $i \in [\![0; p-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ admet un prolongement continu sur $[a_i; a_{i+1}]$.*

Théorème 6. *Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $[a;b]$ vers $\mathbb{K}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[a;b]$ et si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f **continue par morceaux**, alors la suite*

$$\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{converge vers} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Définition 6. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. La fonction f est dite* continue par morceaux *sur I si elle continue par morceaux sur tout segment de I.*

Théorème 7 (Théorème de convergence dominée (admis))**.**
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

(*i*). *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I,*

(*ii*). *si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux,*

(*iii*). *s'il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

alors les fonctions f_n (pour $n \in \mathbb{N}$) et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lemme 1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$ et $a \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n la primitive de f_n sur I s'annulant en a,*

$$\textit{i.e.} \quad F_n : x \in I \longmapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f, alors la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers

$$F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 8. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que*

(*i*). *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,*

(*ii*). *la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement en un point $a \in I$,*

(*iii*). *la suite de fonctions $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g,*

alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de dérivée $f' = g$.

Corollaire 2. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que*

- (i). *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,*
- (ii). *la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$,*
- (iii). *la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$,*

alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers f, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Théorème 9. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que*

- (i). *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,*
- (ii). *pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_k,*
- (iii). *la suite de fonctions $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_p,*

alors la limite simple $f = g_0$ de $(f_n)_n$ sur I est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k \in [\![0; p]\!]$, $f^{(k)} = g_k$ (limite simple de la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$).