Définition 1

*Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou de $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour une suite réelle ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour une suite complexe. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\geq n_0}$) la suite de terme général u_n.*

Définition 2

*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

*On note cette série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$. Pour $n \geq n_0$, le terme S_n est appelé la **somme partielle** de rang n de cette série.*

Définition 3

*La série numérique de terme général u_n est **convergente** lorsque la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge, c'est-à-dire lorsqu'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k = S.$$

*Cette limite S est appelée la **somme** de la série et est notée :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = S.$$

En cas de convergence, on note pour tout $n \geq n_0$:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

*le **reste** d'ordre n de la série.*

Définition 4

*Une série non convergente est dite **divergente**. La **nature** d'une série est sa convergence ou sa divergence.*

Proposition 5

Si la série $\sum u_n$ converge, la suite des restes $(R_n)_n$ converge vers 0.

Proposition 6

*Une **série téléscopique** est une série dont le terme général est de la forme $u_{n+1} - u_n$ pour une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on a alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.$$

Proposition 7 (***Condition nécessaire de convergence d'une série***)

Si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Définition 8

Si la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0*, alors on dit que la série de terme général* u_n ***diverge grossièrement****.*

Proposition 9 (***Opérations sur les séries***)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *deux séries numériques convergentes. Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*, la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ *converge. De plus, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Corollaire 10

Si $\sum u_n$ *est une série numérique convergente et* $\sum v_n$ *une série numérique divergente, alors la série* $\sum(u_n + v_n)$ *est une série divergente.*

Théorème 11 (***Convergence des séries à termes positifs***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positifs. Alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée, c'est-à-dire si et seulement si il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$*.*

De plus, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge, alors :* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$*.*

Corollaire 12 (***Comparaison de séries à termes positifs***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels positifs tels que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

(i) *Si la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*

(ii) *Si la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge, alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *diverge.*

Corollaire 13

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de réels positifs. On suppose que* $u_n = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$ *(ceci est vrai en particulier si* $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$*), alors :*

(i) *si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge,* *(ii) si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.*

Corollaire 14 (*Nature de deux séries équivalentes*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ ont même nature.

Proposition 15 (*Règle de d'Alembert*)

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique à termes **strictement positifs**. On suppose $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.*

(i) Si $\ell > 1$, alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

(ii) Si $\ell < 1$, alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

(iii) Si $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire.

Remarque : les extensions des théorèmes ci-dessus au cas où la positivité (respectivement stricte positivité) n'est valable qu'à partir d'un certain rang ont été à chaque fois vues en remarques.

Théorème 16 (*Comparaison série-intégrale*)

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f : [p;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue, décroissante, à valeurs positives. Alors la série numérique $\sum f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Proposition 17 (*Séries géométriques*)

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$.

Théorème 18 (*Séries de Riemann*)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série numérique à termes positifs $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 19 (*Série définissant l'exponentielle*)

La série numérique $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge pour tout réel $a \in \mathbb{R}^+$ (en fait pour tout $a \in \mathbb{C}$).

Définition 20

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la série $\sum u_n$ **converge absolument** (ou est absolument convergente) si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème 21 (*Série absolument convergente*)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique absolument convergente. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et de plus :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Définition 22

Une série convergente mais non absolument convergente est dite ***semi-convergente****.*

Définition 23

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***alternée*** *si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n |u_n| \qquad \text{ou} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^{n+1} |u_n|.$$

(En d'autres termes, on demande que $(-1)^n u_n$ *soit de signe constant, ce qui s'écrit encore* $u_{n+1}u_n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$*)*

Une série réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est* ***alternée*** *si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *l'est.*

Théorème 24 (*Critère des séries alternées*)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *une série alternée. Si la suite* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et converge vers* 0*, alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*

De plus, la somme de la série est encadrée par les sommes partielles consécutives.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$*, le reste* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *est du signe de* u_{n+1} *et vérifie :*

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Corollaire 25

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère des séries alternées. Le signe de la somme est celui de son premier terme.*

Théorème 26 (*Sommation des relations de comparaison*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* ***réelle à termes positifs****.*

1. *On suppose que la série* $\sum v_n$ ***diverge****.*
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
2. *On suppose que la série* $\sum v_n$ ***converge****.*
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Corollaire 27 (*Sommation des équivalents*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles* **à valeurs positives** *telles que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

- *Si l'une des deux séries diverge, l'autre diverge aussi et on a l'équivalent :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

- *Si l'une des deux séries converge, l'autre converge aussi et on a l'équivalent :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

Définition 28

Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques. On appelle* **produit de Cauchy** *des séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *la série de terme général* w_n *défini par*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} u_{n-l} v_l = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

Théorème 29 (*Produit de Cauchy*)

Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent absolument, alors la série produit de Cauchy* $\sum w_n$ *converge aussi absolument et on a l'égalité :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$